Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{1-\ln x}$ mit maximaler Definitionsmenge D.

2 **a)** Bestimmen Sie D.

2 **b)** Bestimmen Sie den Wert $x \in D$ mit $f(x) = 2$.

3 **2** Zeigen Sie, dass der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto x^2 \cdot \sin x$ punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, und geben Sie den Wert des Integrals $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \sin x \, dx$ an.

3 **3** Skizzieren Sie im Bereich $-1 \leq x \leq 4$ den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit den folgenden Eigenschaften:

- f ist nur an der Stelle $x = 3$ nicht differenzierbar.
- $f(0) = 2$ und für die Ableitung f' von f gilt: $f'(0) = -1$.
- Der Graph von f ist im Bereich $-1 < x < 3$ linksgekrümmt.

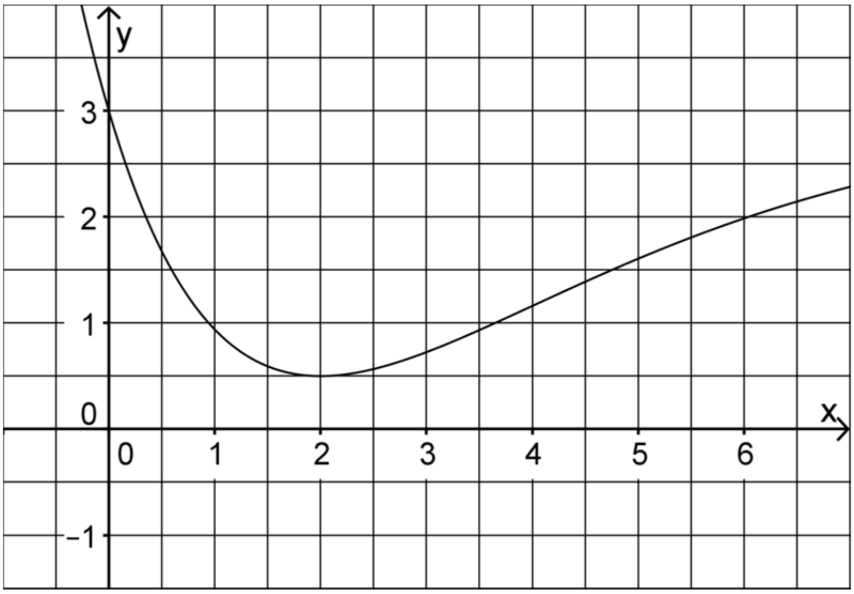
4 Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion f dritten Grades, deren Graph G_f an der Stelle $x = 1$ einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 4$ einen Tiefpunkt besitzt.

3 **a)** Begründen Sie, dass der Graph der Ableitungsfunktion f' von f eine Parabel ist, welche die x-Achse in den Punkten $(1|0)$ und $(4|0)$ schneidet und nach oben geöffnet ist.

2 **b)** Begründen Sie, dass 2,5 die x-Koordinate des Wendepunkts von G_f ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

5 Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.



2 **a)** Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x)\,dx$.

Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.

1 **b)** Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle $x = 2$ an.

2 **c)** Zeigen Sie, dass $F(b) = \int_3^b f(x)\,dx$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D.

3 **a)** Geben Sie D sowie die Nullstelle von f an und bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

4 **b)** Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punkts, in dem der Graph von f eine waagrechte Tangente hat.

2 Geben Sie jeweils den Term und den Definitionsbereich einer Funktion an, die die angegebene(n) Eigenschaft(en) besitzt.

2 **a)** Der Punkt $(2|0)$ ist ein Wendepunkt des Graphen von g.

2 **b)** Der Graph der Funktion h ist streng monoton fallend und rechtsgekrümmt.

3 Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.

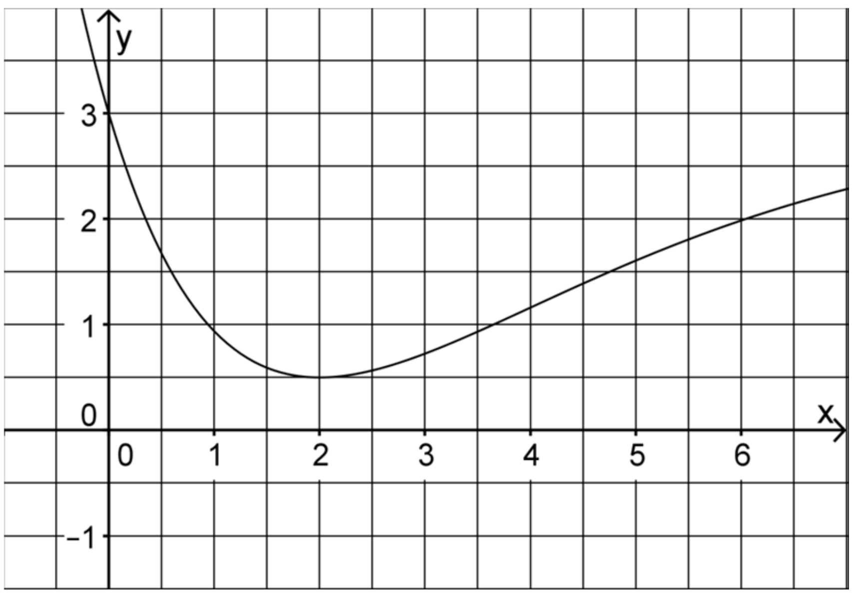


Abb. 1

(Fortsetzung nächste Seite)

2 **a)** Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 1 einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x)\,dx$.

Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.

1 **b)** Geben Sie mithilfe von Abbildung 1 einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle $x = 2$ an.

2 **c)** Zeigen Sie, dass $F(b) = \int_3^b f(x)\,dx$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.

4 **4** Abbildung 2 zeigt den Graphen G_k einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion k. Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion k'. Berücksichtigen Sie dabei insbesondere einen Näherungswert für die Steigung des Graphen G_k an dessen Wendepunkt $(0\,|\,-3)$ sowie die Nullstelle von k'.

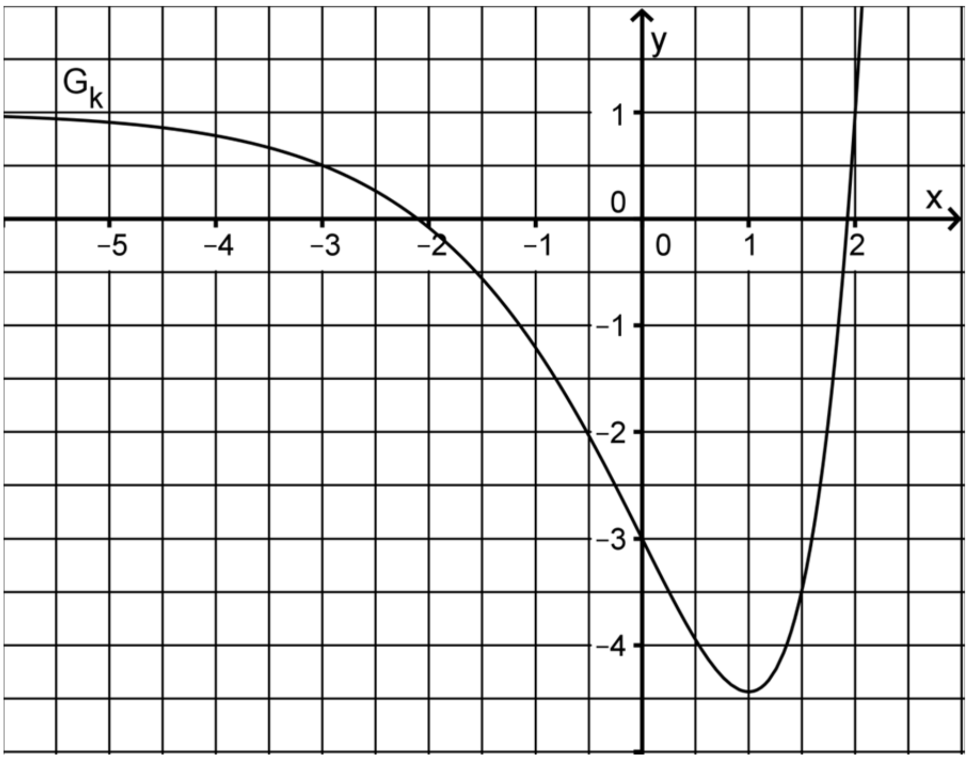


Abb. 2

20

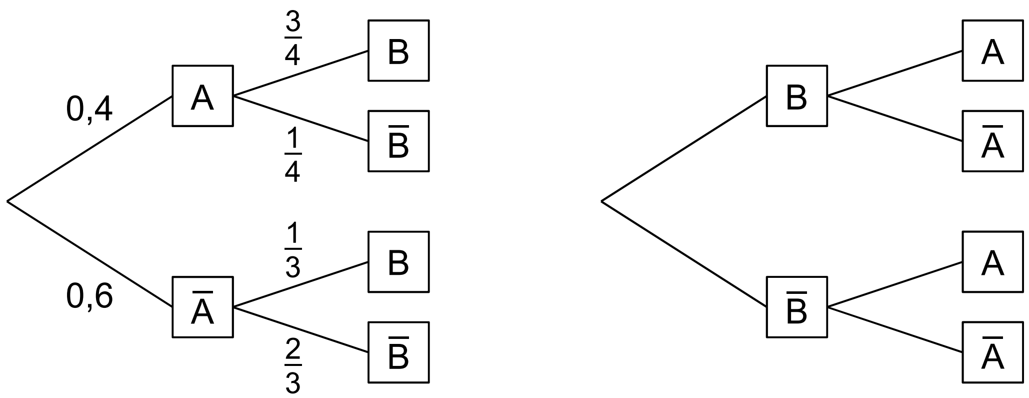
Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

5 **1** Die beiden Baumdiagramme gehören zum selben Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ und ergänzen Sie anschließend an allen Ästen des rechten Baumdiagramms die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.



(Teilergebnis: $P(B) = 0,5$)

2 Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt. Als Ergebnismenge wird festgelegt: {ZZ; WW; ZWZ; ZWW; WZZ; WZW}.

2 **a)** Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist.

3 **b)** Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

10

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt. Als Ergebnismenge wird festgelegt: {ZZ; WW; ZWZ; ZWW; WZZ; WZW}.

2 **a)** Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist.

3 **b)** Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

2 An einem P-Seminar nehmen acht Mädchen und sechs Jungen teil, darunter Anna und Tobias. Für eine Präsentation wird per Los aus den Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein Team aus vier Personen zusammengestellt.

3 **a)** Geben Sie zu jedem der folgenden Ereignisse einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnet werden kann.
A: „Anna und Tobias gehören dem Team an."
B: „Das Team besteht aus gleich vielen Mädchen und Jungen."

2 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den folgenden Term berechnet werden kann:

$$\frac{\binom{14}{4}-\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}}$$

10

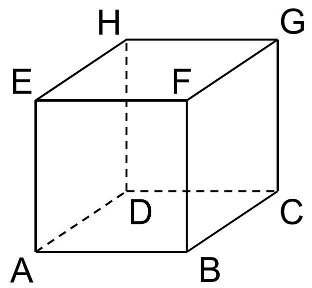
Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Betrachtet wird der abgebildete Würfel ABCDEFGH.
Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0|0|-2)$, $E(2|0|0)$, $F(2|2|0)$ und $H(0|0|0)$.



2 **a)** Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punkts A an.

3 **b)** Der Punkt P liegt auf der Kante $[FB]$ des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts P.

2 Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.

2 **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

3 **b)** Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g.
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:

I Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.

II Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.

Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden.

10

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$ sowie die Punkte $P(1|0|2)$ und $Q(5|2|6)$.

2 **a)** Zeigen Sie, dass die Gerade durch die Punkte P und Q senkrecht zur Ebene E verläuft.

3 **b)** Die Punkte P und Q liegen symmetrisch zu einer Ebene F. Ermitteln Sie eine Gleichung von F.

2 Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.

2 **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

3 **b)** Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g.
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:

I Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.

II Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.

Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden.

10