Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion $f: x \mapsto 2 \cdot \left((\ln x)^2 - 1 \right)$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f.

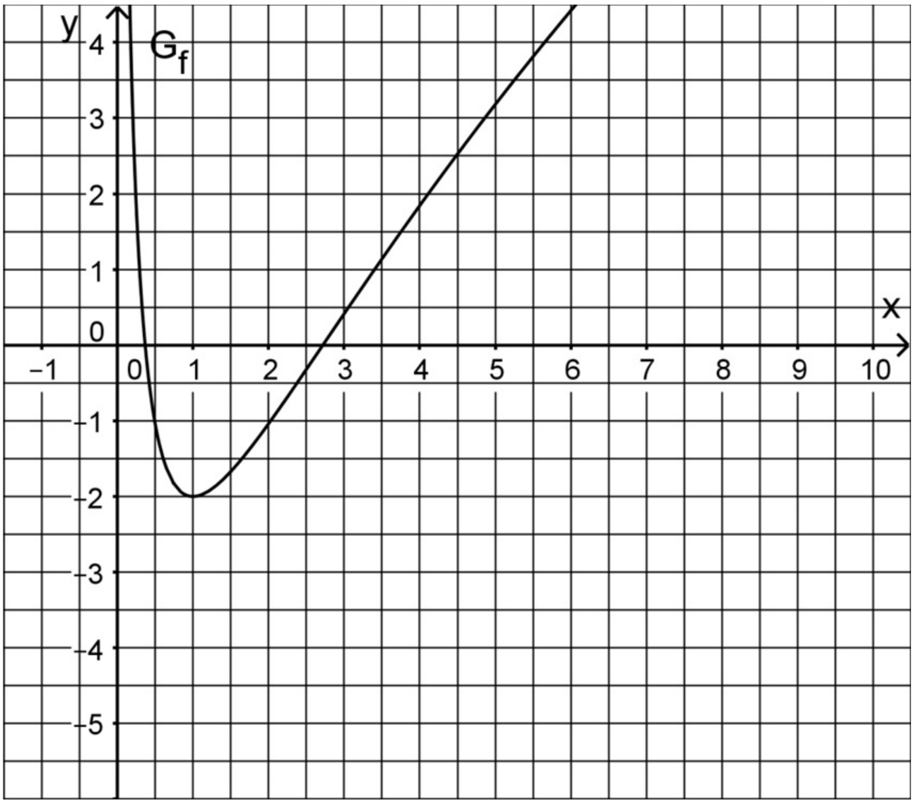


Abb. 1

5 **1 a)** Zeigen Sie, dass $x = e^{-1}$ und $x = e$ die einzigen Nullstellen von f sind, und berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts T von G_f.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{4}{x} \cdot \ln x$)

6 **b)** Zeigen Sie, dass G_f genau einen Wendepunkt W besitzt, und bestimmen Sie dessen Koordinaten sowie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W.

(zur Kontrolle: x-Koordinate von W: e)

6 **c)** Begründen Sie, dass $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ gilt. Geben Sie $f'(0{,}5)$ und $f'(10)$ auf eine Dezimale genau an und zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse in Abbildung 1 ein.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **d)** Begründen Sie unter Zuhilfenahme von Abbildung 1, dass es zwei Werte $c \in]0; 6]$ gibt, für die gilt: $\int_{e^{-1}}^{c} f(x)\,dx = 0$.

Die gebrochen-rationale Funktion $h: x \mapsto 1{,}5x - 4{,}5 + \frac{1}{x}$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stellt in einem gewissen Bereich eine gute Näherung für f dar.

2 **e)** Geben Sie die Gleichungen der beiden Asymptoten des Graphen von h an.

5 **f)** Im IV. Quadranten schließt G_f zusammen mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$ und $x = 2$ ein Flächenstück ein, dessen Inhalt etwa 1,623 beträgt. Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung von diesem Wert, wenn bei der Berechnung des Flächeninhalts die Funktion h als Näherung für die Funktion f verwendet wird.

2 Durch Spiegelung von G_f an der Geraden $x = 4$ entsteht der Graph einer in $]-\infty; 8[$ definierten Funktion g. Dieser Graph wird mit G_g bezeichnet.

2 **a)** Zeichnen Sie G_g in Abbildung 1 ein.

3 **b)** Die beschriebene Spiegelung von G_f an der Geraden $x = 4$ kann durch eine Spiegelung von G_f an der y-Achse mit einer anschließenden Verschiebung ersetzt werden. Beschreiben Sie diese Verschiebung und geben Sie $a, b \in \mathbb{R}$ an, sodass $g(x) = f(ax + b)$ für $x \in]-\infty; 8[$ gilt.

Im Folgenden wird die „w-förmige“ Kurve k betrachtet, die sich aus dem auf $0{,}2 \le x \le 4$ beschränkten Teil von G_f und dem auf $4 < x \le 7{,}8$ beschränkten Teil von G_g zusammensetzt. Die Kurve k wird um 12 Einheiten in negative z-Richtung verschoben. Die dabei überstrichene Fläche dient als Modell für ein 12 Meter langes Aquarium, das durch zwei ebene Wände an Vorder- und Rückseite zu einem Becken ergänzt wird (vgl. Abbildung 2). Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Realität.

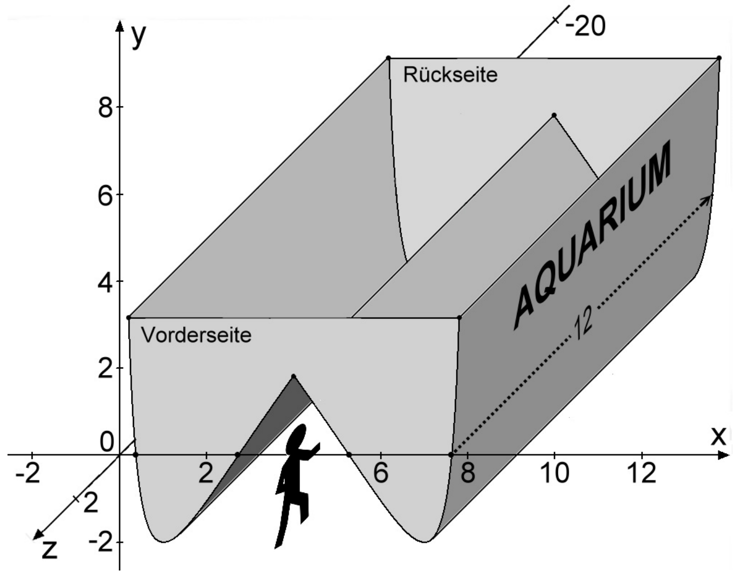


Abb. 2

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **c)** Die Aquariumwände bilden an der Unterseite einen Tunnel, durch den die Besucher hindurchgehen können. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die linke und die rechte Tunnelwand miteinander einschließen.

Das Aquarium wird vollständig mit Wasser gefüllt.

2 **d)** Berechnen Sie die größtmögliche Wassertiefe des Aquariums.

3 **e)** Das Volumen des Wassers im Aquarium lässt sich analog zum Rauminhalt eines Prismas mit Grundfläche G und Höhe h berechnen. Erläutern Sie, dass der Term $24 \cdot \int_{0,2}^{4} \left(f(0,2) - f(x)\right) dx$ das Wasservolumen im vollgefüllten Aquarium in Kubikmetern beschreibt.

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. G_f schneidet die x-Achse bei $x = 0$, $x = 5$ und $x = 10$ und verläuft durch den Punkt $(1|2)$.

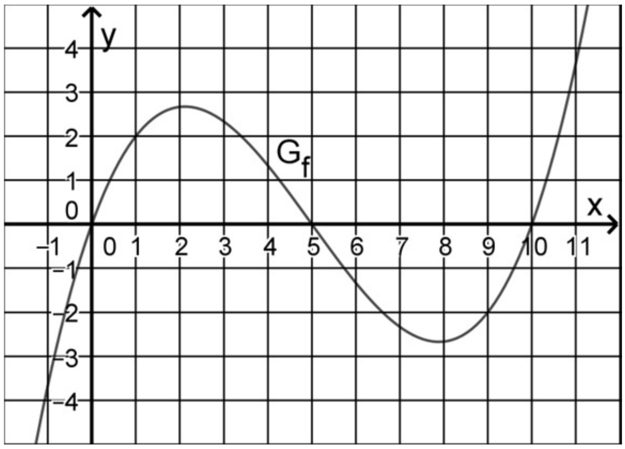


Abb. 1

4 **a)** Ermitteln Sie einen Funktionsterm von f.

(zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{18} \cdot (x^3 - 15x^2 + 50x)$)

6 **b)** Zeigen Sie, dass G_f im Punkt $W(5|0)$ einen Wendepunkt besitzt, und ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W.

4 **c)** G_f geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{18} \cdot (x^3 - 25x)$ durch eine Verschiebung in positive x-Richtung hervor. Ermitteln Sie, um wie viel der Graph von g dazu verschoben werden muss. Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts ist.

Im Folgenden wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F_1 mit $F_1(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ betrachtet.

3 **d)** F_1 hat für $0 \le x \le 10$ zwei ganzzahlige Nullstellen. Geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Angabe.

2 **e)** Begründen Sie mithilfe von Abbildung 1, dass F_1 mindestens eine weitere positive Nullstelle hat.

2 **f)** Begründen Sie, dass F_1 höchstens vier Nullstellen hat.

6 **g)** Für $0 \le x \le 5$ gilt, dass der Graph von f und der Graph einer trigonometrischen Funktion h
- die gleichen Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen,
- beide nicht unterhalb der x-Achse verlaufen,
- jeweils mit der x-Achse eine Fläche des Inhalts $\frac{625}{72}$ einschließen.

Bestimmen Sie einen Term einer solchen Funktion h.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Die Kosten, die einem Unternehmen bei der Herstellung einer Flüssigkeit entstehen, können durch die Funktion $K : x \mapsto x^3 - 12x^2 + 50x + 20$ mit $x \in [0;9]$ beschrieben werden. Dabei gibt $K(x)$ die Kosten in 1000 Euro an, die bei der Produktion von x Kubikmetern der Flüssigkeit insgesamt entstehen. Abbildung 2 zeigt den Graphen von K.

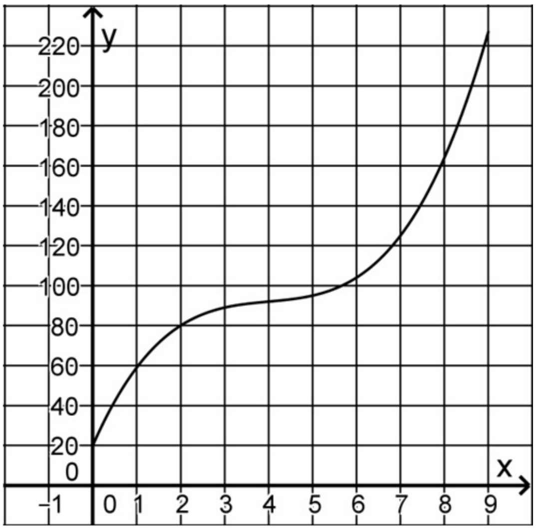


Abb. 2

3 **a)** Geben Sie mithilfe von Abbildung 2

α) die Produktionsmenge an, bei der die Kosten 125 000 Euro betragen.

β) das Monotonieverhalten von K an und deuten Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang.

Die Funktion E mit $E(x) = 23x$ gibt für $0 \le x \le 9$ den Erlös (in 1000 Euro) an, den das Unternehmen beim Verkauf von x Kubikmetern der Flüssigkeit erzielt. Für die sogenannte Gewinnfunktion G gilt $G(x) = E(x) - K(x)$. Positive Werte von G werden als Gewinn bezeichnet, negative als Verlust.

2 **b)** Zeigen Sie, dass das Unternehmen keinen Gewinn erzielt, wenn vier Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden.

3 **c)** Zeichnen Sie den Graphen von E in Abbildung 2 ein. Bestimmen Sie mithilfe der so entstehenden Darstellung den Bereich, in dem die verkaufte Menge der Flüssigkeit liegen muss, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt.

5 **d)** Berechnen Sie, welche Menge der Flüssigkeit verkauft werden muss, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt.

40

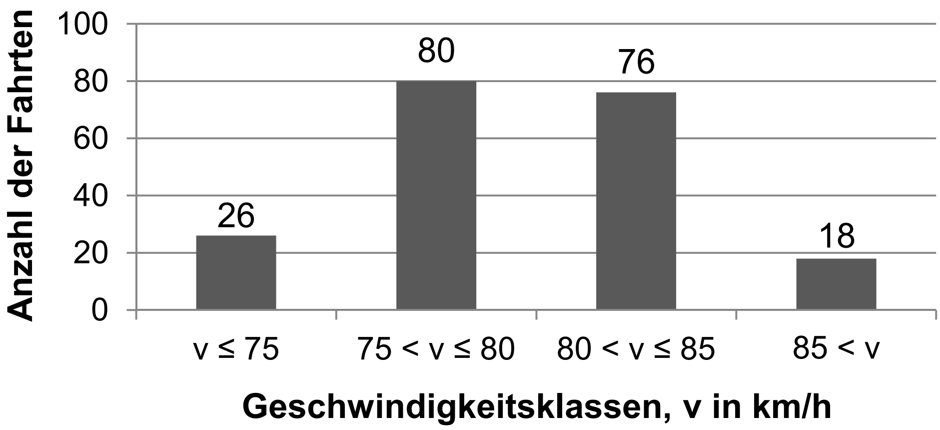
Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

Auf einem Abschnitt einer wenig befahrenen Landstraße ist eine Höchstgeschwindigkeit von 80 km/h zugelassen. An einer Stelle dieses Abschnitts wird die Geschwindigkeit vorbeifahrender Pkw gemessen. Im Folgenden werden vereinfachend nur solche Fahrten betrachtet, bei denen die Fahrer die Geschwindigkeit unabhängig voneinander wählen konnten.

1 Für die ersten 200 erfassten Fahrten ergab sich nach Einteilung in Geschwindigkeitsklassen die folgende Verteilung:



Bei 62 % der 200 Fahrten war der Fahrer allein unterwegs, 65 dieser Alleinfahrer fuhren zu schnell. Aus den 200 Fahrten wird eine zufällig ausgewählt. Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

A: „Der Fahrer war allein unterwegs."

S: „Der Pkw war zu schnell."

5 **a)** Weisen Sie nach, dass die Ereignisse A und S stochastisch abhängig sind, und geben Sie hierfür einen möglichen Grund im Sachzusammenhang an.

Die Geschwindigkeitsmessungen werden über einen längeren Zeitraum fortgesetzt. Dabei zeigt sich, dass die Verteilung der auf km/h genau gemessenen Geschwindigkeiten näherungsweise durch eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}8$ beschrieben werden kann. Beispielsweise entspricht B(100; 0,8; 77) näherungsweise dem Anteil der mit einer Geschwindigkeit von 77 km/h erfassten Pkw.

4 **b)** Bestätigen Sie exemplarisch für eine der beiden mittleren Geschwindigkeitsklassen der oben dargestellten Stichprobe, dass die ermittelte Anzahl der Fahrten mit der Beschreibung durch die Binomialverteilung im Einklang steht.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 **c)** Bestimmen Sie unter Verwendung dieser Binomialverteilung die kleinste Geschwindigkeit v*, für die die folgende Aussage zutrifft: „Bei mehr als 95 % der erfassten Fahrten wird v* nicht überschritten.“

2 Die Polizei führt an der Messstelle eine Geschwindigkeitskontrolle durch. Bei einer Geschwindigkeit von mehr als 83 km/h liegt ein Tempoverstoß vor. Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass die Geschwindigkeit eines vorbeifahrenden Pkw mit einer Wahrscheinlichkeit von 19 % größer als 83 km/h ist.

4 **a)** Berechnen Sie die Anzahl der Geschwindigkeitsmessungen, die mindestens durchgeführt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens ein Tempoverstoß erfasst wird.

5 **b)** Liegt in einer Stichprobe von 50 Geschwindigkeitsmessungen die Zahl der Tempoverstöße um mehr als eine Standardabweichung unter dem Erwartungswert, geht die Polizei davon aus, dass wirksam vor der Geschwindigkeitskontrolle gewarnt wurde, und bricht die Kontrolle ab. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Geschwindigkeitskontrolle fortgeführt wird, obwohl die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Tempoverstoß begangen wird, auf 10 % gesunken ist.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

1 Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4 % der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.

3 **a)** 50 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: „Genau zwei der Teile sind fehlerhaft."

B: „Mindestens 6 % der Teile sind fehlerhaft."

Die Kunststoffteile werden aus Kunststoffgranulat hergestellt. Nach einem Wechsel des Granulats vermutet der Produktionsleiter, dass sich der Anteil der fehlerhaften Teile reduziert hat. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob die Vermutung gerechtfertigt ist, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Teile beträgt mindestens 4 %." auf der Grundlage einer Stichprobe von 200 Teilen auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

4 **b)** Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

3 **c)** Das neue Granulat ist teurer als das vorherige. Geben Sie an, welche Überlegung zur Wahl der Nullhypothese geführt haben könnte, und begründen Sie Ihre Angabe.

2 Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei farbige Sektoren hat. Der Tabelle können die Farben der Sektoren und die Größen der zugehörigen Mittelpunktswinkel entnommen werden.

Farbe	Blau	Rot	Grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°

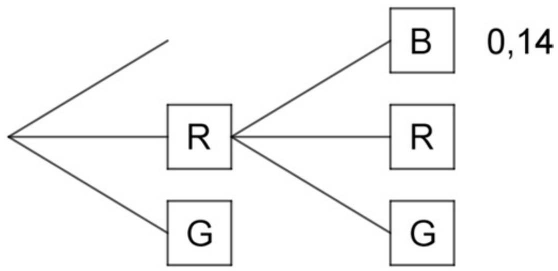
Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung.

2 **a)** Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist $\frac{1}{6}$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, ebenfalls $\frac{1}{6}$ beträgt.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 **b)** Bei dem Spiel ist zu erwarten, dass sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen. Berechnen Sie den Betrag, der ausgezahlt wird, wenn drei verschiedene Farben erscheinen.

5 **c)** Die Größen der Sektoren werden geändert. Dabei werden der grüne und der rote Sektor verkleinert, wobei der Mittelpunktswinkel des roten Sektors wieder doppelt so groß wie der des grünen Sektors ist. Die Abbildung zeigt einen Teil eines Baumdiagramms, das für das geänderte Glücksrad die beiden ersten Drehungen beschreibt. Ergänzend ist für einen Pfad die zugehörige Wahrscheinlichkeit angegeben.



Bestimmen Sie die Größe des zum grünen Sektor gehörenden Mittelpunktswinkels.

20

Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

Auf einem Spielplatz wird ein dreieckiges Sonnensegel errichtet, um einen Sandkasten zu beschatten. Hierzu werden an drei Ecken des Sandkastens Metallstangen im Boden befestigt, an deren Enden das Sonnensegel fixiert wird.
In einem kartesischen Koordinatensystem stellt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Boden dar. Der Sandkasten wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten $K_1(0|4|0)$, $K_2(0|0|0)$, $K_3(3|0|0)$ und $K_4(3|4|0)$ beschrieben. Das Sonnensegel wird durch das ebene Dreieck mit den Eckpunkten $S_1(0|6|2{,}5)$, $S_2(0|0|3)$ und $S_3(6|0|2{,}5)$ dargestellt (vgl. Abbildung 1). Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

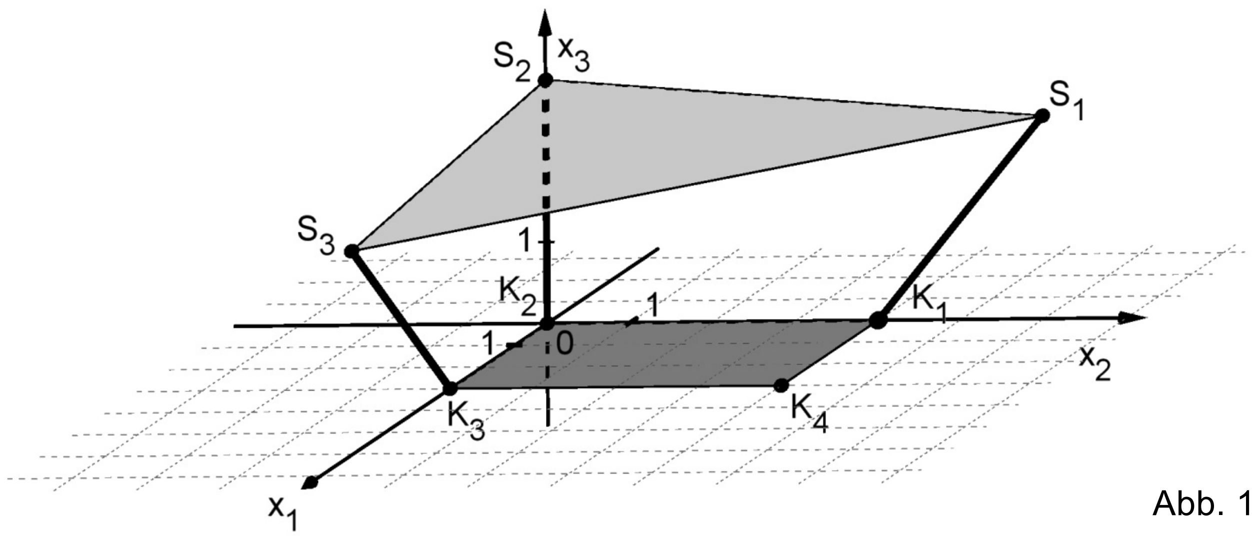


Abb. 1

Die drei Punkte S_1, S_2 und S_3 legen die Ebene E fest.

4 **a)** Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

(zur Kontrolle: $E: x_1 + x_2 + 12x_3 - 36 = 0$)

3 **b)** Der Hersteller des Sonnensegels empfiehlt, die verwendeten Metallstangen bei einer Sonnensegelfläche von mehr als $20\,m^2$ durch zusätzliche Sicherungsseile zu stabilisieren. Beurteilen Sie, ob eine solche Sicherung aufgrund dieser Empfehlung in der vorliegenden Situation nötig ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

Auf das Sonnensegel fallen Sonnenstrahlen, die im Modell und in der Abbildung 1 durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{S_1K_1}$ dargestellt werden können. Das Sonnensegel erzeugt auf dem Boden einen dreieckigen Schatten. Die Schatten der mit S_2 bzw. S_3 bezeichneten Ecken des Sonnensegels werden mit S_2' bzw. S_3' bezeichnet.

2 **c)** Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass S_2' auf der x_2-Achse liegt.

3 **d)** S_3' hat die Koordinaten $(6\,|\,{-2}\,|\,0)$. Zeichnen Sie das Dreieck, das den Schatten des Sonnensegels darstellt, in Abbildung 1 ein. Entscheiden Sie anhand der Zeichnung, ob mehr als die Hälfte des Sandkastens beschattet ist.

3 **e)** Um das Abfließen von Regenwasser sicherzustellen, muss das Sonnensegel einen Neigungswinkel von mindestens 8° gegenüber dem horizontalen Boden aufweisen. Begründen Sie, dass das Abfließen von Regenwasser im vorliegenden Fall nicht sichergestellt ist.

5 **f)** Bei starkem Regen verformt sich das Sonnensegel und hängt durch. Es bildet sich eine sogenannte Wassertasche aus Regenwasser, das nicht abfließen kann. Die Oberseite der Wassertasche verläuft horizontal und ist näherungsweise kreisförmig mit einem Durchmesser von 50 cm. An ihrer tiefsten Stelle ist die Wassertasche 5 cm tief. Vereinfachend wird die Wassertasche als Kugelsegment betrachtet (vgl. Abbildung 2).

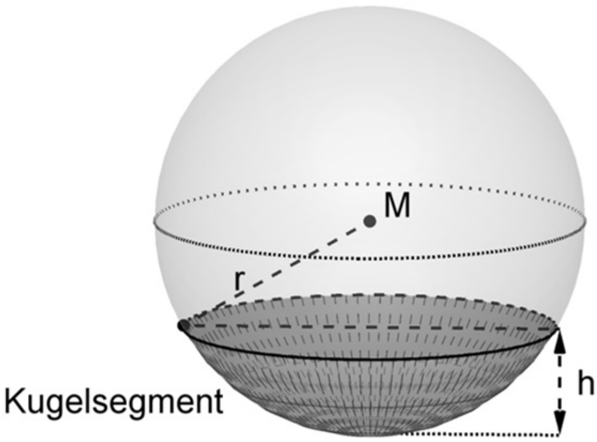


Abb. 2

Das Volumen V eines Kugelsegments kann mit der Formel $V = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot (3r - h)$ berechnet werden, wobei r den Radius der Kugel und h die Höhe des Kugelsegments bezeichnen. Ermitteln Sie, wie viele Liter Wasser sich in der Wassertasche befinden.

(zur Kontrolle: $r = 65\,cm$)

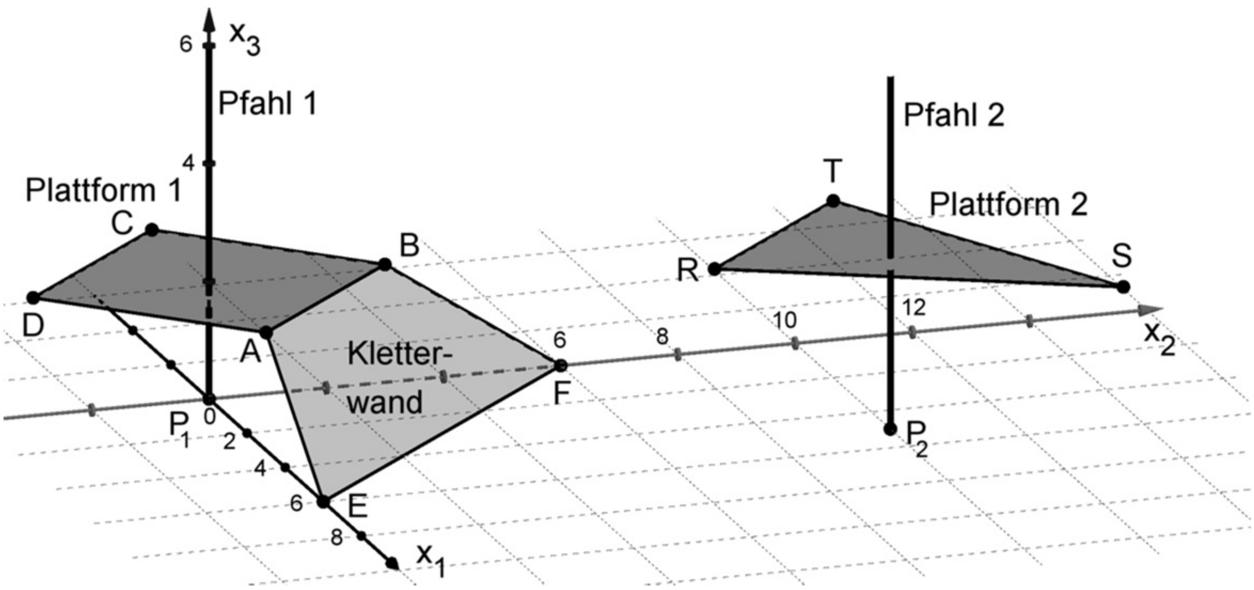
20

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Die Abbildung zeigt modellhaft wesentliche Elemente einer Kletteranlage: zwei horizontale Plattformen, die jeweils um einen vertikal stehenden Pfahl gebaut sind, sowie eine Kletterwand, die an einer der beiden Plattformen angebracht ist.



Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Untergrund. Die Plattformen und die Kletterwand werden als ebene Vielecke betrachtet. Eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit. Die Punkte, in denen die Pfähle aus dem Untergrund austreten, werden durch $P_1(0|0|0)$ und $P_2(5|10|0)$ dargestellt. Außerdem sind die Eckpunkte $A(3|0|2)$, $B(0|3|2)$, $E(6|0|0)$, $F(0|6|0)$, $R(5|7|3)$ und $T(2|10|3)$ gegeben. Die Materialstärke aller Bauteile der Anlage soll vernachlässigt werden.

3 **a)** In den Mittelpunkten der oberen und unteren Kante der Kletterwand sind die Enden eines Seils befestigt, das 20 % länger ist als der Abstand der genannten Mittelpunkte. Berechnen Sie die Länge des Seils.

4 **b)** Die Punkte A, B, E und F liegen in der Ebene L. Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Normalenform.

(zur Kontrolle: $L: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0$)

2 **c)** Zeigen Sie, dass die Kletterwand die Form eines Trapezes hat.

3 **d)** Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Kletterwand mit dem Untergrund einschließt.

(Fortsetzung nächste Seite)

Über ein Kletternetz kann man von einer Plattform zur anderen gelangen. Die vier Eckpunkte des Netzes sind an den beiden Pfählen befestigt. Einer der beiden unteren Eckpunkte befindet sich an Pfahl 1 auf der Höhe der zugehörigen Plattform, der andere untere Eckpunkt an Pfahl 2 oberhalb der Plattform 2. An jedem Pfahl beträgt der Abstand der beiden dort befestigten Eckpunkte des Netzes 1,80 m. Das Netz ist so gespannt, dass davon ausgegangen werden kann, dass es die Form eines ebenen Vierecks hat.

3 **e)** Berechnen Sie den Flächeninhalt des Netzes und erläutern Sie Ihren Ansatz.

5 **f)** Die untere Netzkante berührt die Plattform 2 an der Seite, die durch die Strecke $[RT]$ dargestellt wird. Betrachtet wird der untere Eckpunkt des Netzes, der oberhalb der Plattform 2 befestigt ist. Im Modell hat dieser Eckpunkt die Koordinaten $(5|10|h)$ mit einer reellen Zahl $h > 3$. Die untere Netzkante liegt auf der Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Abstand des betrachteten Eckpunkts von der Plattform 2.

20