Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $h\colon x \mapsto x \cdot \ln\left(x^2\right)$ mit maximalem Definitionsbereich D_h.

2 **a)** Geben Sie D_h an und zeigen Sie, dass für den Term der Ableitungsfunktion h' von h gilt: $h'(x) = \ln\left(x^2\right) + 2$.

3 **b)** Bestimmen Sie die Koordinaten des im II. Quadranten liegenden Hochpunkts des Graphen von h.

2 Die Abbildung 1 zeigt den Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f. Nur in den Punkten $(-4\,|\,f'(-4))$ und $(5\,|\,f'(5))$ hat der Graph $G_{f'}$ waagrechte Tangenten.

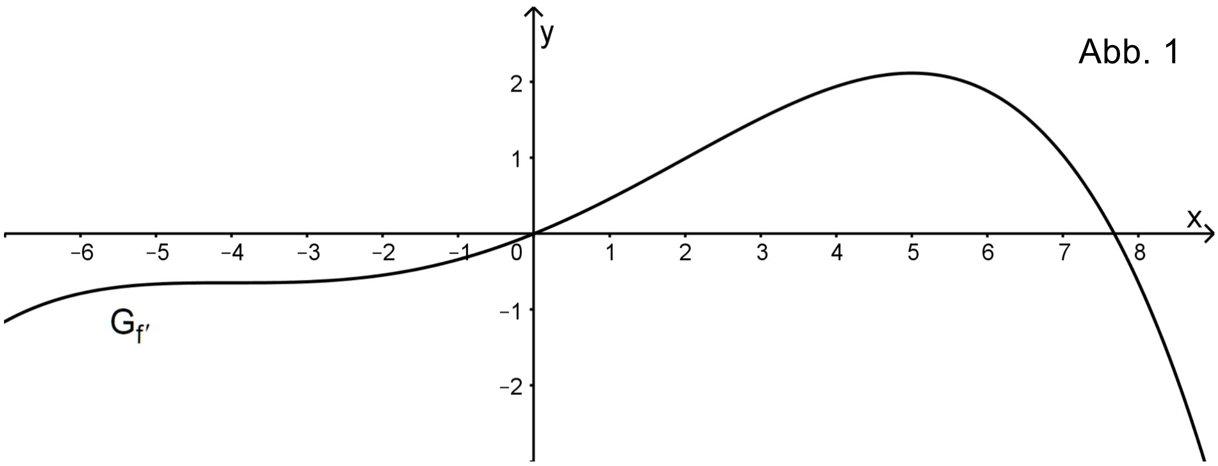

Abb. 1

2 **a)** Begründen Sie, dass f genau eine Wendestelle besitzt.

2 **b)** Es gibt Tangenten an den Graphen von f, die parallel zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten sind. Ermitteln Sie anhand des Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' in der Abbildung 1 Näherungswerte für die x-Koordinaten derjenigen Punkte, in denen der Graph von f jeweils eine solche Tangente hat.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f\colon x \mapsto x^2 + 4$ und $g_m\colon x \mapsto m \cdot x$ mit $m \in \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f und der Graph von g_m mit G_m bezeichnet.

3 **a)** Skizzieren Sie G_f in einem Koordinatensystem. Berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punkts der Graphen G_f und G_4.

2 **b)** Es gibt Werte von m, für die die Graphen G_f und G_m jeweils keinen gemeinsamen Punkt haben. Geben Sie diese Werte von m an.

4 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 0{,}7 \cdot e^{0{,}5x} - 0{,}7$ und $x \in \mathbb{R}$.
Die Funktion g ist umkehrbar. Die Abbildung 2 zeigt den Graphen G_g von g sowie einen Teil des Graphen G_h der Umkehrfunktion h von g.

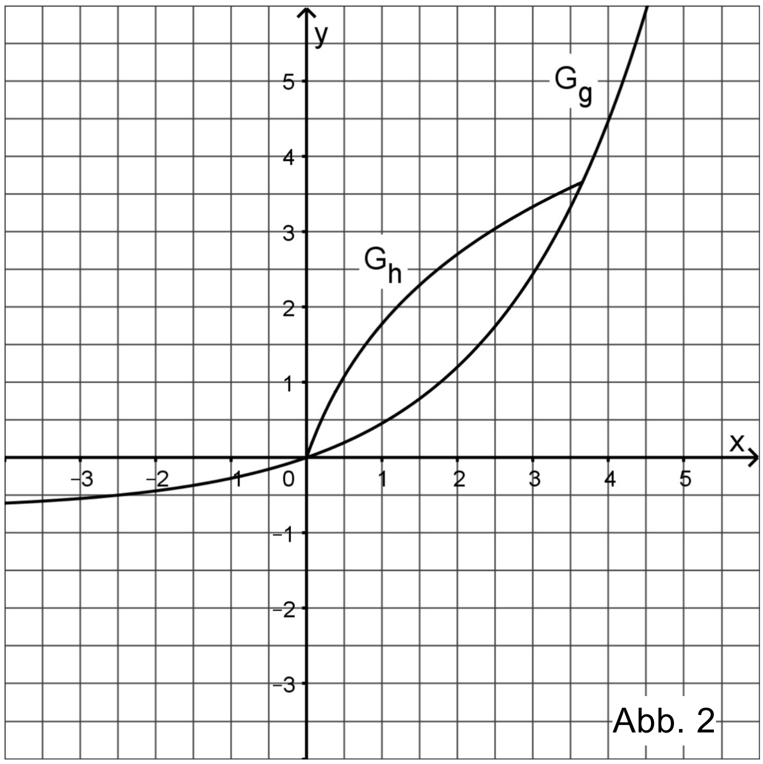

Abb. 2

2 **a)** Zeichnen Sie in die Abbildung 2 den darin fehlenden Teil von G_h ein.

2 **b)** Betrachtet wird das von den Graphen G_g und G_h eingeschlossene Flächenstück. Schraffieren Sie den Teil dieses Flächenstücks, dessen Inhalt mit dem Term $2 \cdot \int_0^{2{,}5} \left(x - g(x)\right) dx$ berechnet werden kann.

2 **c)** Geben Sie den Term einer Stammfunktion der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $k\colon x \mapsto x - g(x)$ an.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $g\colon x \mapsto \ln\left(2-x^2\right)$ mit maximaler Definitionsmenge D_g.

3 **a)** Skizzieren Sie die Parabel mit der Gleichung $y = 2 - x^2$ in einem Koordinatensystem und geben Sie D_g an.

2 **b)** Ermitteln Sie den Term der Ableitungsfunktion g' von g.

2 Die Abbildung 1 zeigt einen Teil des Graphen G_h einer in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ definierten gebrochen-rationalen Funktion h.
Die Funktion h hat bei $x = 2$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel; zudem besitzt G_h die Gerade mit der Gleichung $y = x - 7$ als schräge Asymptote.

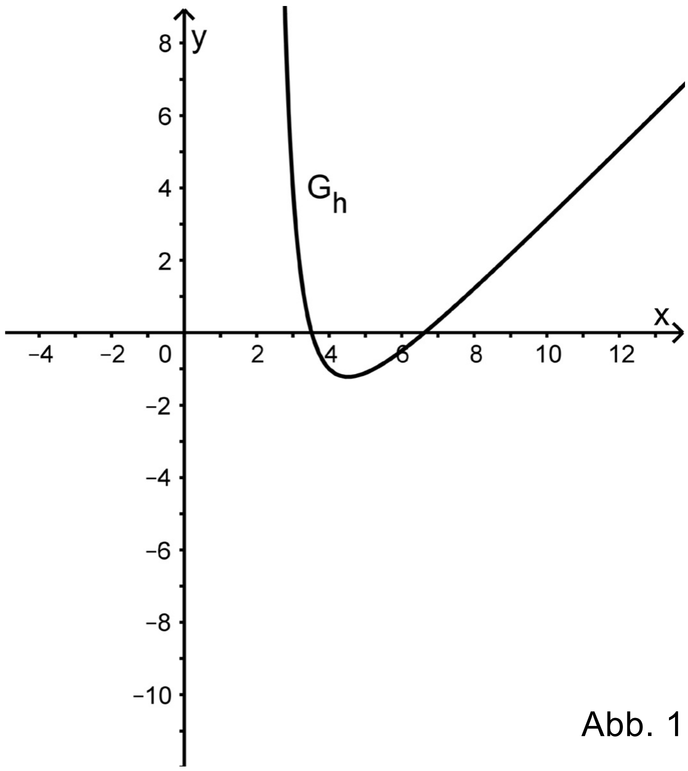

Abb. 1

3 **a)** Zeichnen Sie in die Abbildung 1 die Asymptoten von G_h ein und skizzieren Sie im Bereich $x < 2$ einen möglichen Verlauf von G_h.

2 **b)** Berechnen Sie unter Berücksichtigung des asymptotischen Verhaltens von G_h einen Näherungswert für $\int_{10}^{20} h(x)\,dx$.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $k: x \mapsto \dfrac{-x^2+2x}{2x^2+4}$. Ihr Graph wird mit G_k bezeichnet.

3 **a)** Geben Sie die Nullstellen von k an und begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass G_k die Gerade mit der Gleichung $y=-0{,}5$ als waagrechte Asymptote besitzt.

2 **b)** Berechnen Sie die x-Koordinate des Schnittpunkts von G_k mit der waagrechten Asymptote.

5 **4** Die Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f einer in $[0{,}8;\,+\infty[$ definierten Funktion f.

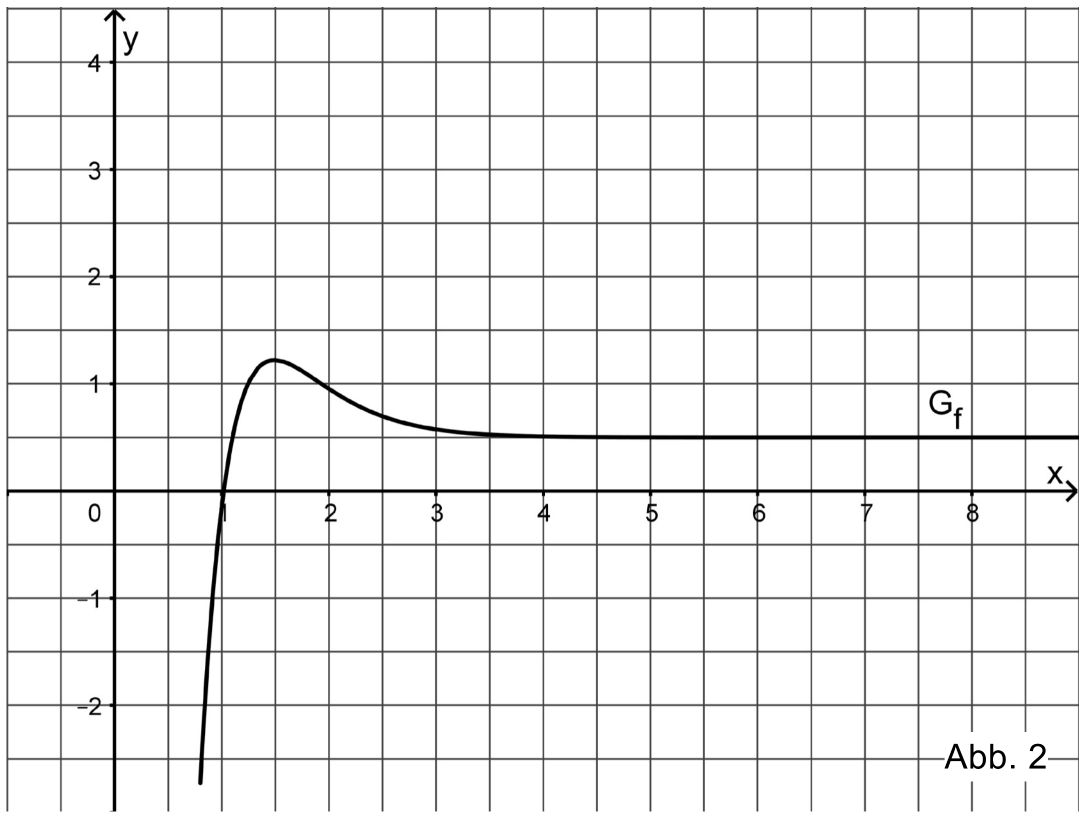

Abb. 2

Betrachtet wird zudem die in $[0{,}8;\,+\infty[$ definierte Integralfunktion

$$J: x \mapsto \int_2^x f(t)\,dt.$$

Begründen Sie mithilfe von Abbildung 2, dass $J(1) \approx -1$ gilt, und geben Sie einen Näherungswert für den Funktionswert $J(4{,}5)$ an. Skizzieren Sie den Graphen von J in der Abbildung 2.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Gegeben sind grüne und rote Würfel, deren Seitenflächen unterschiedlich beschriftet sind und beim Werfen mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Jeder grüne Würfel trägt auf fünf Seitenflächen die Augenzahl 1 und auf einer die Augenzahl 6. Jeder rote Würfel trägt auf jeweils zwei Seitenflächen die Augenzahlen 1, 3 bzw. 6.

2 **a)** In einer Urne befinden sich drei grüne Würfel und zwei rote Würfel. Der Urne werden mit einem Griff zwei Würfel zufällig entnommen. Geben Sie einen Term an, mit dem man die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen kann, dass ein roter Würfel und ein grüner Würfel entnommen werden.

3 **b)** Ein grüner Würfel und ein roter Würfel werden gleichzeitig geworfen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Summe der beiden geworfenen Augenzahlen. Geben Sie alle Werte an, die die Zufallsgröße X annehmen kann, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X=7)$.

5

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Ein Glücksrad besteht aus zwei unterschiedlich großen Sektoren. Der größere Sektor ist mit der Zahl 1 und der kleinere mit der Zahl 3 beschriftet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, beim einmaligen Drehen des Glücksrads die Zahl 1 zu erzielen, wird mit p bezeichnet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

1 **a)** Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden erzielten Zahlen 4 ist, durch den Term $2p \cdot (1-p)$ angegeben wird.

4 **b)** Die Zufallsgröße X beschreibt die Summe der beiden erzielten Zahlen. Bestimmen Sie, für welchen Wert von p die Zufallsgröße X den Erwartungswert 3 hat.

5

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

Die Strecke $[PQ]$ mit den Endpunkten $P(8\,|\,-5\,|\,1)$ und Q ist Durchmesser einer Kugel mit Mittelpunkt $M(5\,|\,-1\,|\,1)$.

3 **a)** Berechnen Sie die Koordinaten von Q und weisen Sie nach, dass der Punkt $R(9\,|\,-1\,|\,4)$ auf der Kugel liegt.

2 **b)** Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass das Dreieck PQR bei R rechtwinklig ist.

5

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben sind die Punkte $P(-2|3|0)$, $R(2|-1|2)$ und $Q(q|1|5)$ mit der reellen Zahl q, wobei Q von P genauso weit entfernt ist wie von R.

3 **a)** Bestimmen Sie q.

(zur Kontrolle: $q=-2$)

2 **b)** Ermitteln Sie die Koordinaten des Eckpunkts S der Raute PQRS. Zeigen Sie, dass PQRS kein Quadrat ist.

5