

# Analysis

## Aufgabengruppe 1

BE

Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ; die Abbildung 1 zeigt ihren Graphen  $G_f$ .

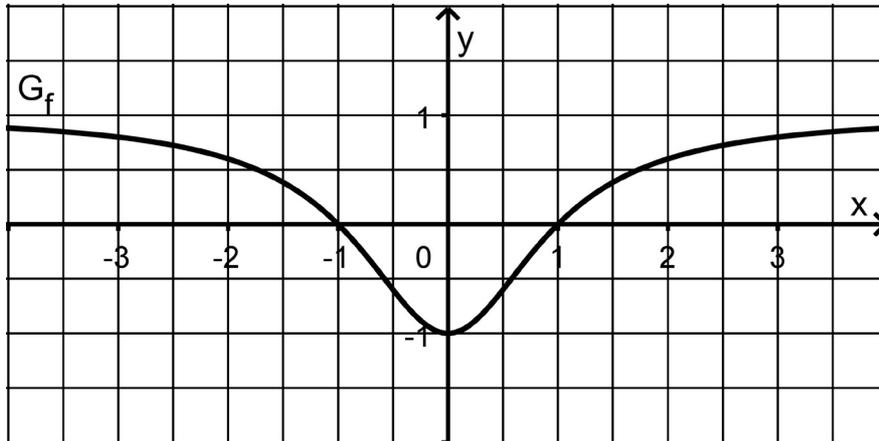


Abb. 1

- 5 **1 a)** Bestätigen Sie rechnerisch, dass  $G_f$  symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse ist, und untersuchen Sie anhand des Funktionsterms das Verhalten von  $f$  für  $x \rightarrow +\infty$ . Bestimmen Sie diejenigen  $x$ -Werte, für die  $f(x) = 0,96$  gilt.
- 4 **b)** Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von  $G_f$ .
- (zur Kontrolle:  $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$ )*
- 4 **c)** Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Tangente  $t$  an  $G_f$  im Punkt  $(3 | f(3))$ . Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem  $t$  die  $x$ -Achse schneidet, und zeichnen Sie  $t$  in die Abbildung 1 ein.

2 Nun wird die in  $\mathbb{R}$  definierte Integralfunktion  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  betrachtet; ihr Graph wird mit  $G_F$  bezeichnet.

- 5 **a)** Begründen Sie, dass  $F$  in  $x = 0$  eine Nullstelle hat, und machen Sie mithilfe des Verlaufs von  $G_f$  plausibel, dass im Intervall  $[1; 3]$  eine weitere Nullstelle von  $F$  liegt.  
Geben Sie an, welche besondere Eigenschaft  $G_F$  im Punkt  $(-1 | F(-1))$  hat, und begründen Sie Ihre Angabe.

*(Fortsetzung nächste Seite)*

2 **b)** Die Gerade mit der Gleichung  $y = x - 1$  begrenzt gemeinsam mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Geben Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks und den sich daraus ergebenden Näherungswert für  $F(1)$  an.

5 **c)** Die Abbildung 2 zeigt den Graphen  $G_f$  sowie den Graphen  $G_g$  der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $g: x \mapsto -\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ .

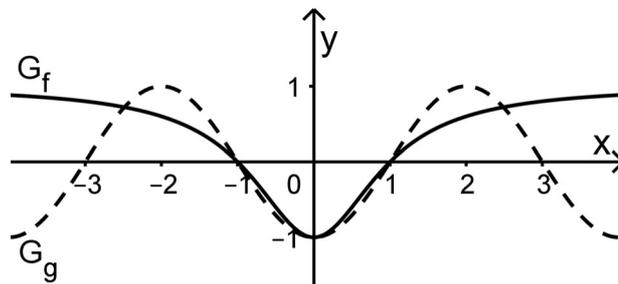


Abb. 2

Beschreiben Sie, wie  $G_g$  aus dem Graphen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $x \mapsto \cos x$  hervorgeht, und berechnen

Sie durch Integration von  $g$  einen weiteren Näherungswert für  $F(1)$ .

(zur Kontrolle:  $F(1) \approx -\frac{2}{\pi}$ )

4 **d)** Berechnen Sie das arithmetische Mittel der beiden in den Aufgaben 2b und 2c berechneten Näherungswerte. Skizzieren Sie den Graphen von  $F$  für  $0 \leq x \leq 3$  unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in der Abbildung 1.

3 Für jeden Wert  $k > 0$  legen die auf  $G_f$  liegenden Punkte  $P_k(-k | f(-k))$  und  $Q_k(k | f(k))$  gemeinsam mit dem Punkt  $R(0 | 1)$  ein gleichschenkeliges Dreieck  $P_kQ_kR$  fest.

5 **a)** Berechnen Sie für  $k = 2$  den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks  $P_2Q_2R$  (vgl. Abbildung 3).

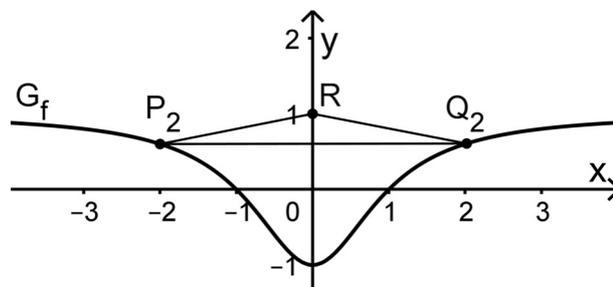


Abb. 3

Zeigen Sie anschließend, dass der Flächeninhalt des Dreiecks  $P_kQ_kR$  allgemein

durch den Term  $A(k) = \frac{2k}{k^2 + 1}$  beschrieben werden kann.

6 **b)** Zeigen Sie, dass es einen Wert von  $k > 0$  gibt, für den  $A(k)$  maximal ist. Berechnen Sie diesen Wert von  $k$  sowie den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks  $P_kQ_kR$ .

## Aufgabengruppe 2

BE

Gegeben ist die Funktion  $f : x \mapsto 1 + 7e^{-0,2x}$  mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}_0^+$ ; die Abbildung 1 zeigt ihren Graphen  $G_f$ .

- 3 1 a) Begründen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung  $y = 1$  waagrechte Asymptote von  $G_f$  ist.  
Zeigen Sie rechnerisch, dass  $f$  streng monoton abnehmend ist.

Für jeden Wert  $s > 0$  legen die Punkte  $(0|1)$ ,  $(s|1)$ ,  $(s|f(s))$  und  $(0|f(s))$  ein Rechteck mit dem Flächeninhalt  $R(s)$  fest.

- 7 b) Zeichnen Sie dieses Rechteck für  $s = 5$  in die Abbildung 1 ein.  
Zeigen Sie, dass  $R(s)$  für einen bestimmten Wert von  $s$  maximal ist, und geben Sie diesen Wert von  $s$  an.

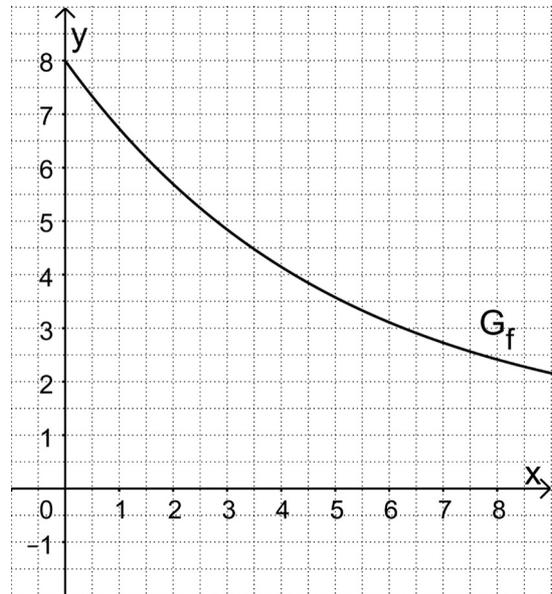


Abb. 1

$$(zur\ Kontrolle: R(s) = 7s \cdot e^{-0,2s})$$

- 7 c) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von  $G_f$ , der  $y$ -Achse sowie den Geraden mit den Gleichungen  $y = 1$  und  $x = 5$  begrenzt wird. Einen Teil dieses Flächenstücks nimmt das zu  $s = 5$  gehörige Rechteck ein. Bestimmen Sie den prozentualen Anteil des Flächeninhalts dieses Rechtecks am Inhalt des Flächenstücks.

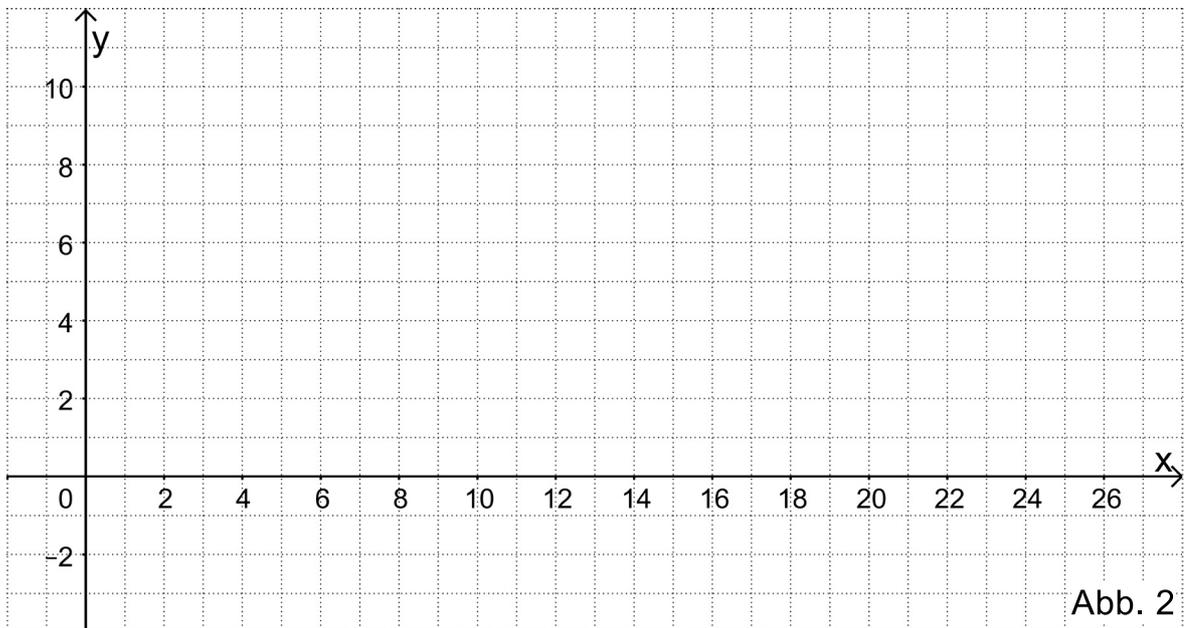
- 2 Die in  $\mathbb{R}_0^+$  definierte Funktion  $A : x \mapsto \frac{8}{f(x)}$  beschreibt modellhaft die

zeitliche Entwicklung des Flächeninhalts eines Algentteppichs am Südufer eines Sees. Dabei ist  $x$  die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Tagen und  $A(x)$  der Flächeninhalt in Quadratmetern.

- 5 a) Bestimmen Sie  $A(0)$  sowie  $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x)$  und geben Sie jeweils die Bedeutung des Ergebnisses im Sachzusammenhang an. Begründen Sie mithilfe des Monotonieverhaltens der Funktion  $f$ , dass der Flächeninhalt des Algentteppichs im Laufe der Zeit ständig zunimmt.

(Fortsetzung nächste Seite)

- 4 **b)** Bestimmen Sie denjenigen Wert  $x_0$ , für den  $A(x_0) = 4$  gilt, und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.  
 (zur Kontrolle:  $x_0 \approx 9,7$ )
- 4 **c)** Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts des Algenteppichs zu Beobachtungsbeginn.
- 2 **d)** Nur zu dem Zeitpunkt, der im Modell durch  $x_0$  (vgl. Aufgabe 2b) beschrieben wird, nimmt die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts des Algenteppichs ihren größten Wert an. Geben Sie eine besondere Eigenschaft des Graphen von  $A$  im Punkt  $(x_0 | A(x_0))$  an, die sich daraus folgern lässt, und begründen Sie Ihre Angabe.
- 3 **e)** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion  $A$  unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in der Abbildung 2.



- 5 **f)** Um die zeitliche Entwicklung des Flächeninhalts eines Algenteppichs am Nordufer des Sees zu beschreiben, wird im Term  $A(x)$  die im Exponenten zur Basis  $e$  enthaltene Zahl  $-0,2$  durch eine kleinere Zahl ersetzt.
- Vergleichen Sie den Algenteppich am Nordufer mit dem am Südufer
- hinsichtlich der durch  $A(0)$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x)$  beschriebenen Eigenschaften (vgl. Aufgabe 2a).
  - hinsichtlich der momentanen Änderungsrate des Flächeninhalts zu Beobachtungsbeginn (vgl. Aufgabe 2c).
- Skizzieren Sie – ausgehend von diesem Vergleich – in der Abbildung 2 den Graphen einer Funktion, die eine mögliche zeitliche Entwicklung des Flächeninhalts des Algenteppichs am Nordufer beschreibt.

**Stochastik**  
**Aufgabengruppe 1**

BE

- 5 **1** In einer Gemeinde gibt es 6250 Haushalte, von denen 2250 über einen schnellen Internetanschluss verfügen. Zwei Drittel der Haushalte, die über einen schnellen Internetanschluss verfügen, besitzen auch ein Abonnement eines Streamingdiensts. 46 % aller Haushalte verfügen weder über einen schnellen Internetanschluss noch besitzen sie ein Abonnement eines Streamingdiensts.

Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

- A: „Ein zufällig ausgewählter Haushalt verfügt über einen schnellen Internetanschluss.“  
B: „Ein zufällig ausgewählter Haushalt besitzt ein Abonnement eines Streamingdiensts.“

Stellen Sie zu der beschriebenen Situation eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel auf und überprüfen Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.

- 2 **2** Ein Telekommunikationsunternehmen möchte neue Kunden gewinnen. Dazu schickt es an zufällig ausgewählte Haushalte Werbematerial. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass die angeschriebenen Haushalte unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 20 % noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügen.
- 4 **a)** Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 10 angeschriebenen Haushalten
- mindestens zwei noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügen.
  - genau acht bereits über einen schnellen Internetanschluss verfügen.
- 2 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term  $0,2^{10} + (1 - 0,2)^{10}$  angegeben wird.
- 5 **c)** Ermitteln Sie, wie viele Haushalte das Unternehmen mindestens anschreiben müsste, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens ein angeschriebener Haushalt, der noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügt, einen solchen einrichten lassen würde. Gehen Sie dabei davon aus, dass sich jeder hundertste angeschriebene Haushalt, der noch nicht über einen schnellen Internetanschluss verfügt, dafür entscheidet, einen solchen einrichten zu lassen.

*(Fortsetzung nächste Seite)*

- 3 Die Zufallsgröße  $Y$  kann die Werte 0, 1, 2, 3 und 4 annehmen. Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $Y$  mit  $a, b \in [0; 1]$ .

k	0	1	2	3	4
$P(Y = k)$	a	b	$\frac{3}{8}$	b	a

- 2 a) Beschreiben Sie, woran man unmittelbar erkennen kann, dass der Erwartungswert von  $Y$  gleich 2 ist.

Die Varianz von  $Y$  ist gleich  $\frac{11}{8}$ .

- 5 b) Bestimmen Sie die Werte von  $a$  und  $b$ .

- 2 c) Die Zufallsgröße  $Z$ , die für eine Laplace-Münze die Anzahl des Auftretens von „Zahl“ bei viermaligem Werfen beschreibt, hat ebenfalls den Erwartungswert 2 und es gilt analog  $P(Z = 2) = \frac{3}{8}$ . Berechnen Sie die Varianz von  $Z$ , vergleichen Sie diese mit der Varianz von  $Y$  und beschreiben Sie davon ausgehend einen qualitativen Unterschied der Wahrscheinlichkeitsverteilungen von  $Z$  und  $Y$ .

## Stochastik

### Aufgabengruppe 2

BE

Das Laplace-Gymnasium veranstaltet auf dem Sportplatz ein Fußballturnier für die neuen 5. Klassen.

**1** An dem Turnier nehmen neun Mannschaften teil. Die Mannschaften bestehen jeweils aus Jungen und Mädchen, wobei zwei Drittel aller mitspielenden Kinder männlich sind.

**3** **a)** Die drei Spielführerinnen und die sechs Spielführer der Fußballmannschaften stellen sich in einer Reihe für ein Foto auf. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für die Aufstellung der neun Kinder, wenn die drei Spielführerinnen nebeneinanderstehen sollen.

**5** **b)** Im Rahmen der Begrüßung durch die Schulleiterin werden aus allen Spielerinnen und Spielern zunächst zehn Kinder ausgelost, die je einen Fußball erhalten sollen. Um die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass fünf Mädchen und fünf Jungen einen Ball erhalten, verwendet Max den Ansatz

$$\binom{10}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5.$$

Geben Sie an, ob Max dabei vom Modell „Ziehen mit Zurücklegen“ oder vom Modell „Ziehen ohne Zurücklegen“ ausgeht. Begründen Sie rechnerisch unter Zugrundelegung eines im Sachkontext realistischen Zahlenwerts für die Gesamtzahl der Spielerinnen und Spieler, dass die von Max berechnete Wahrscheinlichkeit nur geringfügig von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit abweicht.

Neben dem Fußballturnier werden für die Schülerinnen und Schüler auch ein Elfmeterschießen und ein Torwandschießen angeboten.

**2** Dafür konnten sich die Kinder in zwei Listen eintragen. 45% der Kinder haben sich sowohl für das Torwandschießen als auch für das Elfmeterschießen eingetragen, 15% haben sich nur für das Elfmeterschießen eingetragen. 90% der Kinder, die sich für das Torwandschießen eingetragen haben, haben sich auch für das Elfmeterschießen eingetragen. Aus den Kindern wird eines zufällig ausgewählt. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

T: „Das Kind hat sich für das Torwandschießen eingetragen.“

E: „Das Kind hat sich für das Elfmeterschießen eingetragen.“

**4** **a)** Untersuchen Sie die Ereignisse T und E auf stochastische Unabhängigkeit.

*(Fortsetzung nächste Seite)*

- 3 **b)** Drücken Sie jedes der beiden folgenden Ereignisse unter Verwendung der Mengenschreibweise durch T und E aus.

A: „Das Kind hat sich in keine der Listen eingetragen.“

B: „Das Kind hat sich in genau eine Liste eingetragen.“

Beim Torwandschießen treten zwei Schützen gegeneinander an. Zunächst gibt der eine sechs Schüsse ab, anschließend der andere. Wer dabei mehr Treffer erzielt, hat gewonnen; andernfalls geht das Torwandschießen unentschieden aus.

- 3 Joe trifft beim Torwandschießen bei jedem Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 %, Hans mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 %.

- 4 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Joe beim Torwandschießen gegen Hans gewinnt, wenn Hans bei seinen sechs Schüssen genau zwei Treffer erzielt hat. Erläutern Sie anhand einer konkreten Spielsituation, dass das dieser Aufgabe zugrunde gelegte mathematische Modell im Allgemeinen nicht der Realität entspricht.

- 2 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term  $\sum_{k=0}^6 (B(6; 0,2; k) \cdot B(6; 0,3; k))$  angegeben wird.

- 4 **c)** Lisa erreichte im Training in 90 % aller Fälle bei sechs Schüssen mindestens einen Treffer. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihr erster Schuss im Wettbewerb ein Treffer ist, wenn man davon ausgeht, dass sich ihre Trefferquote im Vergleich zum Training nicht ändert. Legen Sie Ihrer Berechnung als Modell eine geeignete Bernoullikette zugrunde.

Aufgabengruppe 1

BE

Die Abbildung 1 zeigt modellhaft eine Mehrzweckhalle, die auf einer horizontalen Fläche steht und die Form eines geraden Prismas hat.

Die Punkte  $A_1(0|0|0)$ ,  $A_2(20|0|0)$ ,  $A_3$  und  $A_4(0|10|0)$  stellen im Modell die Eckpunkte der Grundfläche der Mehrzweckhalle dar, die Punkte  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  und  $B_4$  die Eckpunkte der Dachfläche. Diejenige Seitenwand, die im Modell in der  $x_1x_3$ -Ebene liegt, ist 6 m hoch, die ihr gegenüberliegende Wand nur 4 m.

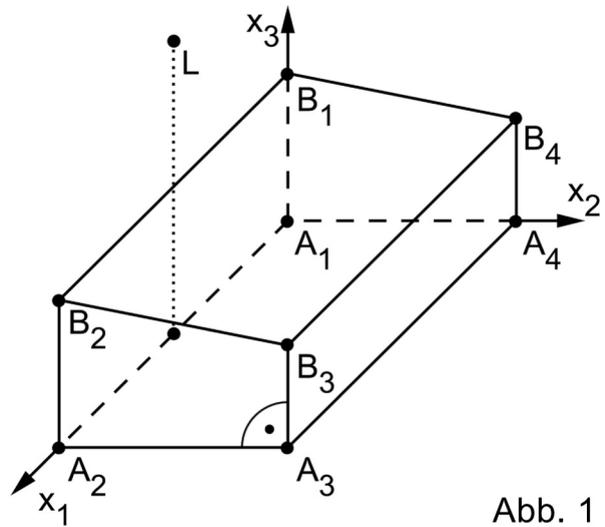


Abb. 1

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m, d. h. die Mehrzweckhalle ist 20 m lang.

- 4 a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte  $B_2$ ,  $B_3$  und  $B_4$  an und bestätigen Sie, dass diese Punkte in der Ebene  $E: x_2 + 5x_3 - 30 = 0$  liegen.
- 3 b) Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels der Dachfläche gegenüber der Horizontalen.
- 6 c) Der Punkt  $T(7|10|0)$  liegt auf der Kante  $[A_3A_4]$ . Untersuchen Sie rechnerisch, ob es Punkte auf der Kante  $[B_3B_4]$  gibt, für die gilt: Die Verbindungsstrecken des Punktes zu den Punkten  $B_1$  und  $T$  stehen aufeinander senkrecht. Geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte an.

Der Punkt  $L$ , der vertikal über dem Mittelpunkt der Kante  $[A_1A_2]$  liegt, veranschaulicht im Modell die Position einer Flutlichtanlage, die 12 m über der Grundfläche angebracht ist. Die als punktförmig angenommene Lichtquelle beleuchtet – mit Ausnahme des Schattenbereichs in der Nähe der Hallenwände – das gesamte Gelände um die Halle.

- 5 d) Die Punkte  $L$ ,  $B_2$  und  $B_3$  legen eine Ebene  $F$  fest. Ermitteln Sie eine Gleichung von  $F$  in Normalenform.

(zur Kontrolle:  $F: 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 90 = 0$ )

(Fortsetzung nächste Seite)

- 3 e) Die Ebene F schneidet die  $x_1x_2$ -Ebene in der Gerade g. Bestimmen Sie eine Gleichung von g.

$$(zur\ Kontrolle: g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R})$$

- 4 f) Die Abbildung 2 zeigt den Grundriss des Hallenmodells in der  $x_1x_2$ -Ebene. Stellen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Schattenbereich der Flutlichtanlage in der Abbildung exakt dar.

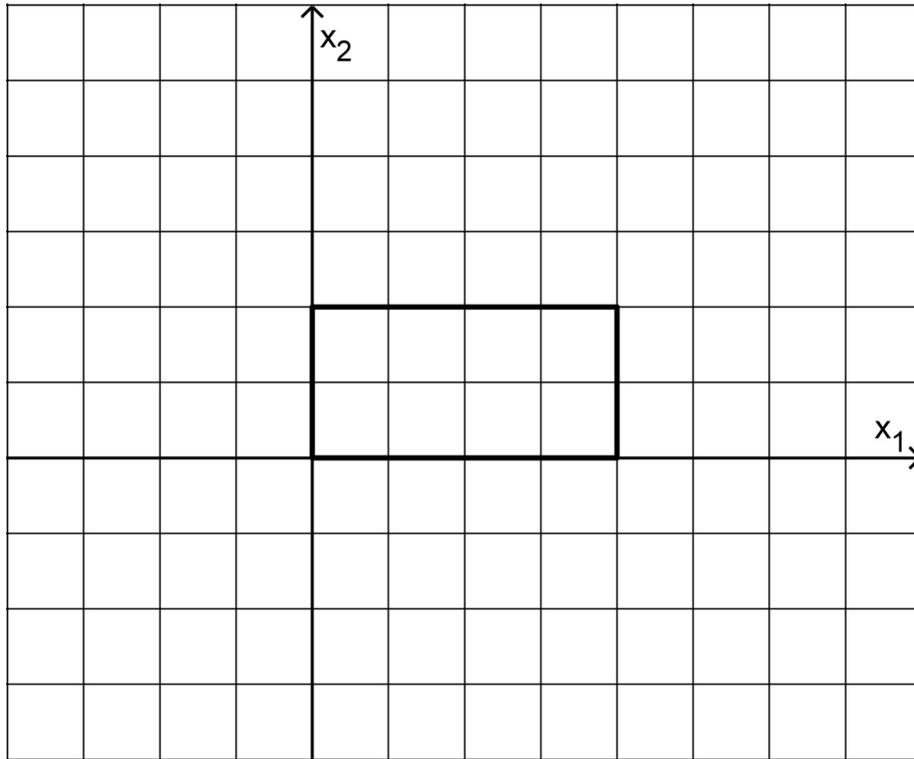


Abb. 2

## Geometrie

### Aufgabengruppe 2

BE

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Ebene

$$E: 4x_1 - 8x_2 + x_3 + 50 = 0 \text{ und die Gerade } g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- 1 a) Erläutern Sie, warum die folgende Rechnung ein Nachweis dafür ist, dass  $g$  und  $E$  genau einen gemeinsamen Punkt haben:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} = -72 \neq 0$$

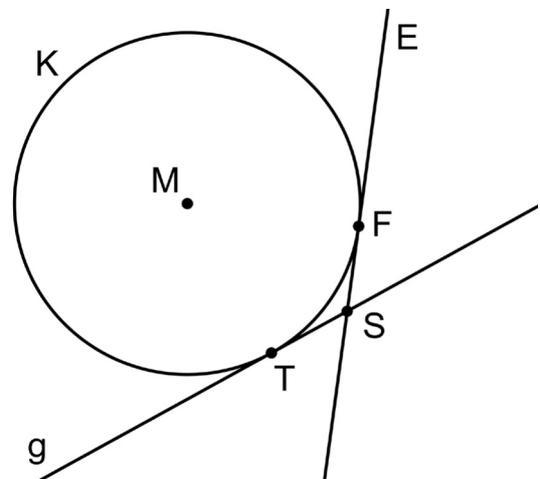
- 5 b) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels von  $g$  und  $E$  und zeigen Sie, dass  $S(0,5 | 6,5 | 0)$  der Schnittpunkt von  $g$  und  $E$  ist.

- 6 c) Die Kugel  $K$  mit dem Mittelpunkt  $M(-13 | 20 | 0)$  berührt die Ebene  $E$ . Bestimmen Sie die Koordinaten des zugehörigen Berührungspunkts  $F$  sowie den Kugelradius  $r$ .

*(zur Kontrolle:  $F(-5 | 4 | 2)$ ,  $r = 18$ )*

- 5 d) Weisen Sie nach, dass die Gerade  $g$  die Kugel  $K$  im Punkt  $T(3 | 12 | -2)$  berührt.

Die Punkte  $M$ ,  $T$ ,  $S$  und  $F$  (vgl. die Aufgaben b, c und d) liegen in einer Ebene  $Z$ . Die nicht maßstabsgetreue Abbildung zeigt die Gerade  $g$ , den Schnitt der Ebene  $E$  mit der Ebene  $Z$  sowie den Schnitt der Kugel  $K$  mit der Ebene  $Z$ .



- 4 e) Begründen Sie, dass das Viereck  $MTSF$  einen Umkreis besitzt.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

- 4 f) Durch Rotation des Vierecks  $MTSF$  um die Gerade  $MS$  entsteht ein Körper. Beschreiben Sie diesen Körper.

In einer Formelsammlung ist zur Berechnung des Volumens eines solchen Körpers die Formel  $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot b$  zu finden. Geben Sie für den beschriebenen Körper die Strecken an, deren Längen für  $a$  bzw.  $b$  einzusetzen sind.