Lösungsblatt von www.okuyakl.de

Aufgabe 1. a)

Wir setzen $x = 3$ in den Funktionsterm ein und setzen gleich Null:

$$\begin{aligned} 0{,}2 \cdot 3^3 - 1{,}4 \cdot 3^2 - 1{,}8 \cdot 3 + 12{,}6 &= 0 \\ 5{,}4 - 12{,}6 - 5{,}4 + 12{,}6 &= 0 \quad (w) \end{aligned}$$

Wir erhalten eine wahre Aussage.

Aufgabe 1. b)

Weitere Nullstellen erhalten wir mittels Polynomdivision durch den bereits bekannten Faktor $(x - 3)$:

$$\begin{array}{rrrrl} 0{,}2x^3 & -1{,}4x^2 & -1{,}8x & +12{,}6 & : (x-3) = \quad 0{,}2x^2 - 0{,}8x - 4{,}2 \\ \underline{-(0{,}2x^3} & \underline{-0{,}6x^2)} & & & \\ & -0{,}8x^2 & -1{,}8x & & \\ & \underline{-(-0{,}8x^2} & \underline{+2{,}4x)} & & \\ & & -4{,}2x & +12{,}6 & \\ & & \underline{-(-4{,}2x} & \underline{+12{,}6)} & \\ & & & 0 & \end{array}$$

Die gewonnene quadratische Gleichung untersuchen wir mit der Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned} x_{2/3} &= \tfrac{0{,}8 \pm \sqrt{0{,}64 - 4 \cdot 0{,}2 \cdot (-4{,}2)}}{2 \cdot 0{,}2} \\ \underline{x_2} &= \underline{7} \\ \underline{x_3} &= \underline{-3} \end{aligned}$$

Weitere Nullstellen der Funktion sind $N_2(-3|0)$ und $N_3(7|0)$.

Aufgabe 1. c)

Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhält man, wenn man $x = 0$ in den Funktionsterm einsetzt:

$$g(0) = 0 - 0 - 0 + 12{,}6 = 12{,}6 \quad \Rightarrow \quad S_y(0|12{,}6)$$

Aufgabe 1. d)

Die höchste vorkommende Potenz, hier x^3 entscheidet mit dem Vorzeichen ihres Vorfaktors, wohin die Funktion für große $|x|$ geht. Der Vorfaktor ist positiv, und die Potenz ist ungerade. Aus diesem Grund gilt:

$$\lim_{x \to \infty} 0{,}2x^3 - 1{,}4x^2 - 1{,}8x + 12{,}6 = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} 0{,}2x^3 - 1{,}4x^2 - 1{,}8x + 12{,}6 = -\infty$$

Aufgabe 2.

- Die y-Achse ist Polstelle ohne Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ x^2 im Nenner.
- Doppelte Nullstelle bei $x = 1$ $\Rightarrow$ $(x - 1)^2$ im Zähler
- Zählergrad = Nennergrad; waagrechte Asymptote bei $y = 0{,}5$ $\Rightarrow$ Faktor $\frac{1}{2}$

Funktionsterm:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{2x^2}$$

Aufgabe 3. a)
Definitionslücken sind Nullstellen des Nenners. Mit dem Satz von Vieta erhalten wir:

$$\begin{aligned}
x^2+2x-3 &= 0 \qquad = (x+a)(x+b)\\
a+b &= 2\\
a\cdot b &= -3\\
\Rightarrow a &= 3\\
b &= -1\\
x^2+2x-3 &= 0 \qquad = (x+3)(x-1)
\end{aligned}$$

Die Nullstellen von diesem Term sind also $x_1=-3$ und $x_2=1$.
Aufgabe 3. b)
Wir raten die erste Nullstelle des Zählers, sie ist $x=1$. Anschließend führen wir die Polynomdivision aus:

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ 2x^3-2x^2-8x+8\big):\big(x-1\big)=2x^2-8\\
\underline{-2x^3+2x^2}\\
\qquad\qquad\ \ -8x+8\\
\qquad\qquad\ \ \ \underline{\ 8x-8}\\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Wir faktorisieren weiter:

$$2x^2-8=2(x^2-4)=2(x+2)(x-2)$$

Damit erhalten wir:

$$f(x)=\frac{2(x+2)(x-2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

Aufgabe 3. c)
Den Term $(x-1)$ kürzen wir aus Zähler und Nenner und betrachten das Verhalten der Funktion in der Umgebung von $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-8}{x+3}=-\frac{6}{4}=-1{,}5$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-8}{x+3}=-\frac{6}{4}=-1{,}5$$

Der Grenzwert existiert und die Funktion nähert sich von beiden Seiten derselben Stelle $y=-1{,}5$, die Funktion f ist also an ihrer Definitionslücke $x=1$ stetig fortsetzbar.
Aufgabe 3. d)
Als Polstelle kommt die Stelle $x=-3$ infrage. Wir wenden auch hier den Limes an:

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{2x^2-8}{x+3}=\text{„}\frac{10}{+0}\text{"}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{2x^2-8}{x+3}=\text{„}\frac{10}{-0}\text{"}=-\infty$$

Aufgabe 3. e)
Die gefundene Polstelle bei $x=-3$ ist auch gleichzeitig senkrechte Asymptote. Der Zählergrad ist um eins größer als der Nennergrad, daher finden wir noch eine schräge Asymptote:

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ 2x^3-2x^2\ -8x\ +8\big):\big(x^2+2x-3\big)=2x-6+\dfrac{10x-10}{x^2+2x-3}\\
\underline{-2x^3-4x^2\ +6x}\\
\qquad\ \ -6x^2\ -2x\ +8\\
\qquad\ \ \ \underline{\ 6x^2+12x-18}\\
\qquad\qquad\quad 10x-10
\end{array}$$

Die schräge Asymptote ist der Term vor dem Rest:

$$y=2x-6$$

.

Aufgabe 4. a)
Die Definitionsmenge ist:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

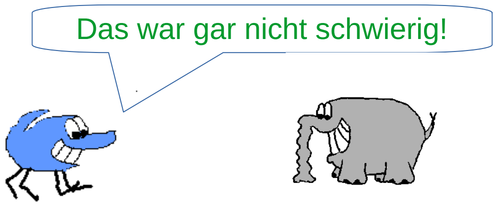
Waagrechte Asymptote: $y = 5$
Senkrechte Asymptote: $x = 2$
Aufgabe 4. b)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{x+2} + 5 &= 7 && \mid -5 \\ \tfrac{1}{x+2} &= 2 && \mid \cdot (x+2) \\ 1 &= 2x + 4 && \Rightarrow \quad x = -1{,}5 \end{aligned}$$

Aufgabe 4. c)

$$g(x) = \frac{1}{0{,}5 \cdot x + 2} + 6$$

Waagrechte Asymptote: $y = 6$
Senkrechte Asymptote: $x = 4$



Hier geht es zurück zum Aufgabenblatt