Lösungsblatt von www.okuyakl.de

L Ö S U N G

Aufgabe 1.

Wir berechnen zunächst das Volumen einer solchen Kugel:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (1\,\mathrm{m})^3 = 4{,}19\,\mathrm{m}^3$$

$1000\ dm^3 = 1\,\mathrm{m}^3 \quad \Rightarrow \quad 1\,\mathrm{m}^3$ wiegt $30\,\mathrm{kg} \quad \Rightarrow$ die Kugel wiegt:

$$m_K = 4{,}19\,\mathrm{m}^3 \cdot 30\,\mathrm{kg/m}^3 = 126\,\mathrm{kg}$$

Man kann diese Kugel nicht alleine tragen; sie ist zu schwer (und zu unhandlich).

Aufgabe 2.

Durch Umstellen der Formel für das Kugelvolumen erhalten wir für den Radius:

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 && \mid \cdot \tfrac{3}{4\pi} \\ \tfrac{3V}{4\pi} &= r^3 && \mid \sqrt[3]{} \\ \sqrt[3]{\tfrac{3V}{4\pi}} &= r && = \tfrac{d}{2} \\ d &= 2 \cdot \sqrt[3]{\tfrac{3V}{4\pi}} && (*) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.a)

Wir setzen $V = 1\,\mathrm{m}^3$ in $(*)$ ein:

$$d = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1\,\mathrm{m}^3}{4\pi}} = 1{,}24\,\mathrm{m}$$

Aufgabe 2.b)

Wir setzen $V = 49\,\mathrm{cm}^3$ in $(*)$ ein:

$$d = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 49\,\mathrm{cm}^3}{4\pi}} = 4{,}54\,\mathrm{cm}$$

Aufgabe 3.

Die Dose hat die Höhe $h = 6r$. Das Zylindervolumen ist damit:

$$V_Z = \pi r^2 \cdot h = 6\pi r^3$$

Das Volumen der drei Bälle ist:

$$V_{3B} = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^3$$

Das Volumen der Zwischenräume ist die Differenz davon; der prozentuale Anteil am Zylindervolumen errechnet sich mit der Formel:

$$p\% = \left(\frac{V_Z - V_{3B}}{V_Z}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{V_{3B}}{V_Z}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{4\pi r^3}{6\pi r^3}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{4}{6}\right) \cdot 100\% = 33\%$$

Aufgabe 4.

Wir nehmen das Kugelvolumen als Referenz und setzen nacheinander das Zylinder- und das Kegelvolumen damit gleich und lösen nach der jeweiligen Höhe h auf.

Höhe des Zylinders:

$$\begin{aligned} V_K &= V_Z \\ \tfrac{4}{3}\pi r^3 &= \pi r^2 \cdot h_Z \quad \mid : \pi r^2 \\ \tfrac{4}{3} r &= h_Z \end{aligned}$$

Höhe des Kegels:

$$\begin{aligned} V_K &= V_{Ke} \\ \tfrac{4}{3}\pi r^3 &= \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_{Ke} \quad \mid : \tfrac{1}{3}\pi r^2 \\ 4r &= h_{Ke} \end{aligned}$$

Vergleicht man die Höhe dieser drei Körper, so ist der Zylinder am niedrigsten, die Kugel mit der Höhe $2r$ ist an zweiter Stelle, am höchsten ist der Kegel.

Aufgabe 5.

Das Volumen eines Tropfens ist:

$$V_T = \frac{4}{3}\pi(2\,\mathrm{mm})^3 = 33{,}5\,\mathrm{mm}^3$$

Die Anzahl der Tropfen in einer Woche ist bei 30 Tropfen pro Minute:

$$n = 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 30 = 302400$$

Die Wassermenge, die verloren geht, errechnet sich mit der Tropfenanzahl mal des Tropfenvolumens:

$$V = n \cdot V_T = 302400 \cdot 33{,}5\,\mathrm{mm}^3 \approx 1 \cdot 10^7\,\mathrm{mm}^3 = 10\,\mathrm{dm}^3 = 10\ l$$

Aufgabe 6.

Der Radius r nimmt um ein Zehntel zu und ist dann 1,1 r. Die prozentuale Zunahme des Volumens errechnet sich dann mit der Formel:

$$\left(\frac{V_{neu}}{V_{alt}} - 1\right) \cdot 100\% = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi(1{,}1r)^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} - 1\right) \cdot 100\% = \left(\frac{1{,}1^3}{1} - 1\right) \cdot 100\% = (1{,}331 - 1) \cdot 100\% = 33\%$$

Aufgabe 7.

Der Radius der Kugel sei r, ihr Volumen V_K. Die Kantenlänge des Würfels ist dann $2r$, das Würfelvolumen ist $V_W = (2r)^3 = 8r^3$. Der prozentuale Anteil des Volumens der einbeschriebenen Kugel ist folglich:

$$\frac{V_K}{V_W} \cdot 100\% = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{8r^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} \cdot 100\% = 52\%$$

Aufgabe 8. a)

Die Erdoberfläche beträgt insgesamt:

$$O_E = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (6370\,\mathrm{km})^2 = 5{,}1 \cdot 10^8\,\mathrm{km}^2$$

Das Wasser wäre über diese Fläche gleichmäßig verteilt; Die Wassertiefe h_E wäre hierbei:

$$V = O_E \cdot h_E \quad \Rightarrow \quad h_E = \frac{V}{O_E} = \frac{1{,}4 \cdot 10^9\,\mathrm{km}^3}{5{,}1 \cdot 10^8\,\mathrm{km}^2} = 2{,}7\,\mathrm{km}$$

Aufgabe 8. b)

Der Oberflächeninhalt des Mondes Europa ist:

$$O_M = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (1560\,\mathrm{km})^2 = 3{,}1 \cdot 10^7\,\mathrm{km}^2$$

Die Durchschnittliche Wassertiefe h_M ist hierbei:

$$V = O_E \cdot h_M \quad \Rightarrow \quad h_M = \frac{V}{O_M} = \frac{2 \cdot 1{,}4 \cdot 10^9\,\mathrm{km}^3}{3{,}1 \cdot 10^7\,\mathrm{km}^2} = 90\,\mathrm{km}$$

Aufgabe 9. a)

Das Volumen beider Kugeln mit dem Radius $1{,}5a$ ist gleich dem Volumen der vereinigten Kugel mit dem neuen Radius R. Wir setzen beide Volumina gleich und lösen nach dem neuen Radius auf:

$$\begin{aligned}
2 \cdot \tfrac{4}{3}\pi(1{,}5\ a)^3 &= \tfrac{4}{3}\pi R^3 & \mid : \tfrac{4}{3}\pi \\
2 \cdot (1{,}5\ a)^3 &= R^3 & \mid \sqrt[3]{} \\
\sqrt[3]{2} \cdot 1{,}5\ a &= R \\
R &= 1{,}89\ a
\end{aligned}$$

Aufgabe 9. b)

Die Oberfläche der zwei Kugeln ist:

$$O_{2K} = 2 \cdot 4\pi \cdot (1{,}5\ a)^2 = 56{,}5\ a^2$$

Die neue Oberfläche der vereinigten Kugel ist:

$$O_{neu} = 4\pi \cdot (1{,}89\ a)^2 = 44{,}9\ a^2$$

Den prozentualen Anteil der neuen Oberfläche im Vergleich zur alten erhalten wir mit:

$$\frac{O_{neu}}{O_{2K}} \cdot 100\% = 79{,}4\%$$

Aufgabe 10.
Der Radius der Orange ohne Schale ist

$$r = \frac{8{,}0\,\mathrm{cm}}{2} - 0{,}6\,\mathrm{cm} = 3{,}4\,\mathrm{cm}$$

Das Volumen des Fruchtfleisches ist damit:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (3{,}4\,\mathrm{cm})^3 = 165\,\mathrm{cm}^3 = 165\,\mathrm{mL}$$

Der Saftanteil hiervon beträgt 70%; multipliziert mit 5 Orangen ergibt dies ein Saftmenge von:

$$V_{ges} = 165\,\mathrm{mL} \cdot 0{,}7 \cdot 5 = 576\,\mathrm{mL}$$

Aufgabe 11. a)
Es gilt

$$r = \frac{4{,}27\,\mathrm{cm}}{2} = 2{,}135\,\mathrm{cm}$$

Damit erhalten wir für die Oberfläche:

$$O = 4 \cdot \pi r^2 = 57{,}28\,\mathrm{cm}^2$$

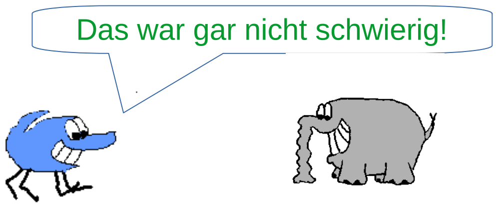
Und für das Volumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 40{,}76\,\mathrm{cm}^3$$

Aufgabe 11. b)

$$\text{Dichte } \varrho = \frac{\text{Masse } m}{\text{Volumen } V} = \frac{45{,}9\,\mathrm{g}}{40{,}76\,\mathrm{cm}^3} = 1{,}13\,\mathrm{g/cm}^3$$

Die Dichte von Wasser ist geringer: $\varrho_{Wasser} = 1\,\mathrm{g/cm}^3$.
Aufgabe 11. c)
Der Golfball geht im See unter; er kann nicht schwimmen. [Im Toten Meer $\varrho = 1{,}24\,\mathrm{g/cm}^3$ könnte er schwimmen.]



Hier geht es zurück zum Aufgabenblatt