Lösungsblatt von www.okuyakl.de

Aufgabe 1.
Wir stellen um und logarithmieren:

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{5} &= \left(\tfrac{2}{1{,}2^2}\right)^x && \mid \lg() \\ \lg\tfrac{2}{5} &= x\cdot\lg\tfrac{2}{1{,}2^2} && \mid :\lg\tfrac{2}{1{,}2^2} \\ \frac{\lg\frac{2}{5}}{\lg\frac{2}{1,2^2}} &= x \\ x &= -2{,}8 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.
Es handelt sich um eine exponentielle Abnahme; der Wachstumsfaktor a ist:

$$a = \left(1 - \frac{1{,}5}{100}\right) = 0{,}985$$

Die Zerfallsgleichung lautet damit:

$$N(t) = 140\cdot 0{,}985^t$$

Für die Aufgabenstellung setzen wir die Anzahl der aktiven Kerne zu Beginn auf 100% und am Ende des Beobachtungszeitraums auf 42% und erhalten:

$$\begin{aligned} 42\% &= 100\%\cdot 0{,}985^t && \mid : 100\% \\ 0{,}42 &= 0{,}985^t && \mid \lg() \\ \lg 0{,}42 &= t\cdot\lg 0{,}985 && \mid :\lg 0{,}985 \\ t &= \tfrac{\lg 0{,}42}{\lg 0{,}985} && = 57{,}4 \end{aligned}$$

Antwort: nach 57,4 s beträgt die Anzahl aktiver Kerne noch 42% des Anfangswertes.
Aufgabe 3. a)

$$\log_5(\sqrt[4]{5ab}) = \frac{1}{4}\cdot(\log_5 5 + \log_5 a + \log_5 b) = \underline{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot(\log_5 a + \log_5 b)}$$

Aufgabe 3. b)

$$\log_a\left(\frac{14a}{b^4}\right) = \log_a 14 + \log_a a - 4\cdot\log b = \underline{1 + \log_a 14 - 4\cdot\log b}$$

Aufgabe 4.

$$\ldots = -0{,}25\log_a b - 0{,}5\log_a b + 0{,}4\log_a b^{-1{,}5} = \underline{-1{,}35\log_a b}$$

Aufgabe 5.

$$\begin{aligned} 0{,}25\cdot 20000 &= 20000\cdot 3^{-0{,}3t} && \mid : 20000 \\ 0{,}25 &= 3^{-0{,}3t} && \mid \log(\ldots) \\ \log 0{,}25 &= -0{,}3t\cdot\log 3 && \mid :\log 3 \\ \tfrac{\log 0{,}25}{\log 3} &= -0{,}3t && \mid :(-0{,}3) \\ \tfrac{\log 0{,}25}{-0{,}3\log 3} &= t \\ \underline{4{,}2} &= t \end{aligned}$$

Nach etwa 4 Jahren beträgt der Bestand nur noch 25% der Anfangspopulation.

Aufgabe 6.

$$
\begin{aligned}
5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{x+2} + 250 &= 0 \\
5 \cdot 5^{2x} - 3 \cdot 5^2 \cdot 5^x + 250 &= 0 && |\text{Substitution:} \quad 5^x = u \\
5 \cdot u^2 - 75u + 250 &= 0 && |:5 \\
u^2 - 15u + 50 &= 0 && |\text{Mitternachtsformel} \\
u_{1/2} &= \tfrac{15 \pm \sqrt{225 - 4 \cdot 50}}{2} \\
u_1 &= 10 \\
u_2 &= 5 && |\text{Rücksubstitution} \quad u = 5^x \\
10 &= 5^{x_1} \quad \Rightarrow \quad \underline{x_1} = \underline{\log_5 10} \\
5 &= 5^{x_2} \quad \Rightarrow \quad \underline{x_2} = \underline{1}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7.
Die Ersatzgleichung lautet:

$$
\begin{aligned}
x^{\frac{2}{3}} &= 0{,}5^{\frac{1}{3}} && |()^3 \\
x^2 &= 0{,}5 && |\sqrt{} \\
x &= \sqrt{\tfrac{1}{2}} && = \tfrac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8.
Wir wenden die Logarithmengesetze an:

$$
\begin{aligned}
T(x) &= 5 \cdot \log_5 x + 2x \cdot \log_5 5 + 5 \cdot \log_5 5^2 - 5 \cdot \log_5 x \\
&= 2x \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 2x + 10
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9. a)
Aufstellen der Funktionsgleichung für exponentielle Abnahme:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= f(0) \cdot \left(1 - \tfrac{p}{100}\right)^t \\
f(t) &= 50000 \cdot 0{,}91^t
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9. b)
Wenn der Fischbestand um 20000 abnimmt, sind noch 30000 vorhanden:

$$
\begin{aligned}
30000 &= 50000 \cdot 0{,}91^t && |:50000 \\
0{,}6 &= 0{,}91^t && |\log \\
\log 0{,}6 &= t \cdot \log 0{,}91 && |:\log 0{,}91 \\
t &= 5{,}4
\end{aligned}
$$

Es dauert 5,4 Jahre, bis die Behörden Maßnahmen ergreifen.
Aufgabe 9. c)
Exponentielles Wachstum mit Faktor $\left(1 + \frac{6}{100}\right)$ ab Zeitpunkt $t = 5{,}4$:

$$
\begin{aligned}
50000 &= 30000 \cdot 1{,}06^t && |:30000 \\
\tfrac{5}{3} &= 1{,}06^t && |\log \\
\log \tfrac{5}{3} &= t \cdot \log 1{,}06 && |:\log 1{,}06 \\
t &= 8{,}8
\end{aligned}
$$

Es dauert insgesamt 5,4 + 8,8 = 14,2 Jahre, bis sich der Fischbestand wieder erholt hat.
Aufgabe 10.
Die Funktionsgleichung $y = b \cdot a^x$ besteht aus dem Startwert b=€ 47900 und dem Abnahmefaktor:

$$a = 1 - \frac{p}{100} = 0{,}77$$

Beides eingesetzt ergibt:

$$y = € \, 47900 \cdot 0{,}77^x$$

Das Auto hat seinen Restwert nach x Jahren:

$$\begin{aligned}
€\,4550 &= €\,47900 \cdot 0{,}77^x && |:€\,47900 \\
0{,}095 &= 0{,}77^x && |\log(\ldots) \\
\log 0{,}095 &= x \cdot \log 0{,}77 | : \log 0{,}77 \\
\tfrac{\log 0{,}095}{\log 0{,}77} &= x \\
x &= \underline{9}
\end{aligned}$$

Das Fahrzeug ist 9 Jahre alt.

Aufgabe 11.

Das Kapital wächst exponentiell bis zur Ver-n-fachung mit folgender Gleichung:

$$\begin{aligned}
n \cdot K_0 &= K_0 \cdot \left(1 + \tfrac{p}{100}\right)^x && |:K_0 \\
n &= \left(1 + \tfrac{p}{100}\right)^x && |\log(\ldots) \\
\log n &= x \cdot \log\left(1 + \tfrac{p}{100}\right) && |:\log\left(1 + \tfrac{p}{100}\right) \\
\tfrac{\log n}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)} &= x
\end{aligned}$$

In der nach x aufgelösten Beziehung kommen nur die Variablen n und p vor, nicht aber das Kapital K_0.

Aufgabe 12. a)

$$-2 \cdot \log_a a \cdot (-\log_c c) - (-3 \cdot \log_x x \cdot 0) = -2 \cdot (-1) - 0 = 2$$

Aufgabe 12. b)

$$5 \lg a - 4 \lg a - \lg b + \lg b - \lg a + 2{,}5 \lg b = 2{,}5 \lg b$$

Aufgabe 13. Es liegt exponentielles Wachstum vor mit dem Faktor

$$a = 1 + \frac{p}{100} = 1{,}05$$

Nach zehn Jahren hat sich ein Anfangskapital um den Faktor

$$k = 1{,}05^{10} = 1{,}629$$

vermehrt. Der gleiche Faktor soll auch für das 7-jährige Kapital gelten; also ist der Wachstumsfaktor für ein Jahr dann:

$$\begin{aligned}
1{,}629 &= a^7 && |\sqrt[7]{\quad} \\
\sqrt[7]{1{,}629} &= a && = 1{,}0722
\end{aligned}$$

Hieraus errechnet sich ein Jahreszins von:

$$p = (a-1) \cdot 100 = 7{,}2\%$$

Aufgabe 14. a)

$$\begin{aligned}
\tfrac{5 \cdot 5^x}{2^x} &= 78{,}125 \\
5 \cdot \left(\tfrac{5}{2}\right)^x &= 78{,}125 && |:5 \\
\left(\tfrac{5}{2}\right)^x &= 15{,}625 && |\log \\
x \cdot \log \tfrac{5}{2} &= \log 15{,}625 && |:\log \tfrac{5}{2} \\
x &= \tfrac{\log 15{,}625}{\log \frac{5}{2}} && = 3
\end{aligned}$$

Aufgabe 14. b) Die Ersatzgleichung lautet:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}^{-3} &= \tfrac{1}{27} \\
\sqrt{x}^{-3} &= 3^{-3} && |(\quad)^{-\frac{1}{3}} \\
\sqrt{x} &= 3 && |(\quad)^2 \\
x &= 9
\end{aligned}$$

Aufgabe 14. c) Die Ersatzgleichung lautet:

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{3}} &= 7 \quad |(\quad)^3 \\ x &= 7^3 = 343 \end{aligned}$$

Aufgabe 15.
Der Funktionsterm für die Bakterien vom Typ A lautet (t = Stunden):

$$y_A = 14000 \cdot 2^t$$

Die Bakterien vom Typ B vermehren sich um den Faktor

$$a = 1 + \frac{p}{100} = 2{,}3$$

halbstündlich, also lautet der Funktionsterm:

$$y_B = 5000 \cdot 2{,}3^{2t}$$

Beide Terme setzen wir gleich und lösen nach t auf:

$$\begin{aligned} 14000 \cdot 2^t &= 5000 \cdot 2{,}3^{2t} \quad |:5000 \quad :2^t \\ \tfrac{14000}{5000} &= \tfrac{2{,}3^{2t}}{2^t} \\ 2{,}8 &= \left(\tfrac{2{,}3^2}{2}\right)^t \quad |\log \\ \log 2{,}8 &= t \cdot \log 2{,}645 \quad |:\log 2{,}645 \\ t &= 1{,}06 \end{aligned}$$

Nach etwa einer Stunde sind beide Bakterienkulturen gleichauf.
Aufgabe 16.
Von 2016 ($t = 0$) bis 2028 sind es 12 Jahre. Schadstoffausstoß $S(t = 0) = 100\%$. Es ergibt sich folgende exponentielle Abnahme um jährlich $p = 1{,}25$ % :

$$S(t) = 100\% \cdot (1 - 0{,}0125)^t$$

Zum Zeitpunkt ($t = 12$) gilt mit eingesetzten Werten:

$$S(12) = 100\% \cdot 0{,}9875^{12} = 85{,}9895\%$$

Insgesamt hat sich der Schadstoffausstoß dann also um $(100 - 86)\% = 14\%$ verringert. Das Ziel kann auf diese Weise also erreicht werden.

Aufgabe 17.
a)

$$5^x = \frac{1}{25} = 5^{-2}$$

Exponentenvergleich liefert:

$$x = -2$$

b)

$$7^c = \frac{1}{7^{\frac{4}{3}}} = 7^{-\frac{4}{3}}$$

Exponentenvergleich liefert:

$$c = -\frac{4}{3}$$

Aufgabe 18. a) Die Ersatzgleichung lautet:

$$\sqrt{a}^x = a^{2{,}5}$$

$$a^{0{,}5x} = a^{2{,}5}$$

Daraus folgt:

$$0{,}5x = 2{,}5$$

und

$$x = 5$$

.

Aufgabe 18. b)
Ersatzgleichung:

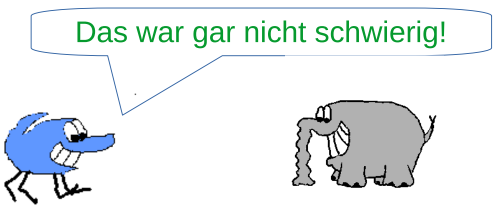
$$a^x = a^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Aufgabe 19.

$$x = \log_6 216$$

$$x = 3$$



Hier geht es zurück zum Aufgabenblatt