Lösungsblatt von www.okuyakl.de

Aufgabe 1. a)
Wir können ausklammern und erhalten als doppelte Nullstelle:

$$x^2(\frac{3}{4}x^2 - 4x + 6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = 0$$

Untersuchung des quadratischen Terms in der Klammer liefert für die Diskriminante D:

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 = -2 < 0$$

Es existieren keine weiteren Nullstellen.
Aufgabe 1. b)
Wir leiten ab und setzen gleich Null:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &= 3x^3 - 12x^2 + 12x \\ 0 &= 3x(x^2 - 4x + 4) \qquad x_1 = 0 \\ 0 &= (x-2)^2 \qquad\qquad\quad x_{2/3} = 2 \end{aligned}$$

Die Koordinaten der gefundenen Stellen erhalten wir durch Einsetzen in $f(x)$:

$$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(0|0)$$

$$f(2) = \frac{3}{4} \cdot 16 - 4 \cdot 8 + 6 \cdot 4 = 4 \quad \Rightarrow \quad P_2(2|4)$$

Aufgabe 2.
Allgemeiner Funktionsterm 3. Grades:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Eine ganzrationale Funktion ist punktsymmetrisch, wenn sie nur ungerade Potenzen von X enthält:

$$\Rightarrow \quad f(x) = ax^3 + cx$$

Sie enthält den Punkt $H(-1|4)$:

$$f(-1) = -a - c = 4 \quad I$$

Am Hochpunkt ist die Ableitung null:

$$f'(x) = 3ax^2 + c \quad \Rightarrow \quad 3a + c = 0 \quad II$$

Wir setzen I in II ein und erhalten:

$$3a - 4 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad c = -6$$

Der Funktionsterm lautet:

$$f(x) = 2x^3 - 6x$$

Aufgabe 3. a)

$$f'(x) = 3x^5 - 2{,}5 + 4 \cdot x^{-3}$$

Aufgabe 3. b)

$$f'(x) = (2x^{2{,}5})' = 5x^{1{,}5}$$

Aufgabe 4. a)
Wir leiten ab:

$$f'(x) = 0{,}75x^2 + 6x + 9$$

Die Tangentensteigung im Punkt $B(-4|-4)$ erhalten wir durch Einsetzen:

$$m = f'(-4) = 12 - 24 + 9 = -3$$

Der gesuchte Winkel erfüllt die Beziehung:

$$m = \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}(-3) = -71^\circ = 109^\circ$$

Aufgabe 4. b)
Die Funktion hat zwei Tangenten dieser Steigung, wenn es zwei Lösungen der Gleichung gibt:

$$\begin{aligned} 0{,}75x^2 + 6x + 9 &= -3 \\ 0{,}75x^2 + 6x + 12 &= 0 \\ x_{1/2} &= \tfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 0{,}75 \cdot 12}}{1{,}5} \\ x_1 = x_2 &= -\tfrac{6}{1{,}5} = -4 \end{aligned}$$

Es gibt nur eine Lösung; also gibt es keine weitere parallele Tangente. (Für Interessierte: die Tangente geht durch den Wendepunkt)

Aufgabe 5.
Zunächst leiten wir ab und setzen die beiden Nullstellen ein:

$$f'(x) = -2x + 5 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 5 \qquad f'(5) = -5$$

Die zugehörigen Normalensteigungen sind die negativen Kehrwerte davon:

$$m_1 = -\frac{1}{5} \qquad m_2 = \frac{1}{5}$$

Damit sind die beiden Funktionsterme der Normalen:

$$0 = t_1 \quad \Rightarrow \quad n_1 : y = -\frac{1}{5}x$$

$$0 = \frac{1}{5} \cdot 5 + t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad n_2 : y = \frac{1}{5}x - 1$$

Wir setzen beide Geraden gleich und erhalten für den Schnittpunkt:

$$-\frac{1}{5}x = \frac{1}{5}x - 1 \quad \Rightarrow \quad x_S = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad y_S = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad P(2{,}5| - 0{,}5)$$

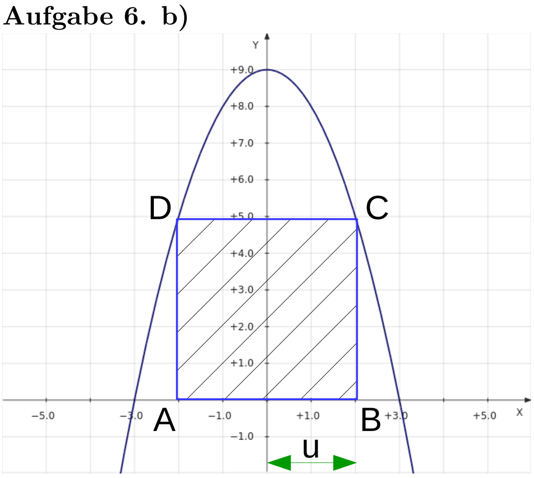
Das gesuchte Dreieck ist gleichschenklig mit der Basis auf der x-Achse, die Basislänge ist 5. Die Höhe des Dreiecks ist die y-Koordinate von P, also -0,5. Die Dreiecksfläche ist der Betrag davon:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0{,}5 = 1{,}25\ FE$$

Aufgabe 6. a)
Ein möglicher Funktionsterm lautet:

$$f(x) = -x^2 + 9$$

Aufgabe 6. b)



Aufgabe 6. c)
Das Rechteck hat die Breite $2u$ und die Höhe:

$$f(u) = -u^2 + 9$$

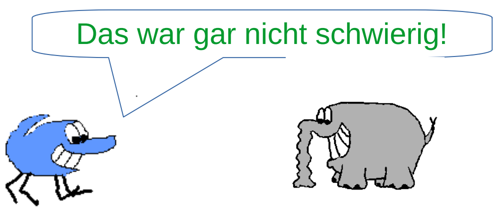
Die Fläche ist das Produkt aus beiden, also:

$$A(u) = 2u \cdot (-u^2 + 9) = -2u^3 + 18u$$

Um das Maximum zu bekommen, leiten wir ab und setzen gleich null:

$$A'(u) = -6u^2 + 18 = 0 \Rightarrow u_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

Für $u = \sqrt{3}$ wird die Fläche maximal.



Hier geht es zurück zum Aufgabenblatt