Lösungsblatt von www.okuyakl.de

Aufgabe 1.

- Zähler enthält Term $(x-2)$
- Nenner enthält Term $(x-3)^2$
- Zählergrad = Nennergrad und die Faktoren vor den höchsten Potenzen müssen 3 ergeben:

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{3x(x-2)}{(x-3)^2}$$

Aufgabe 2.

$$\begin{aligned} \tfrac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \tfrac{\frac{1}{x}+3-3{,}5}{x-2} &= \tfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} \\ &= \tfrac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} &= -\tfrac{1}{2x} \\ f'(2) &= \lim_{x\to 2} -\tfrac{1}{2x} &= -\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Aufgabe 3. a)
Wir setzen den Nenner gleich null:

$$\begin{aligned} x^2-4 &= 0 \\ (x-2)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Wir erkennen in der faktorisierten Form zwei einfache Definitionslücken bei 2 und -2. Der Zähler hat an diesen Stellen keine Nullstelle, also sind dies zwei Polstellen erster Ordnung (ohne VZW).

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

Aufgabe 3. b)

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = -\frac{x^3}{x^2-4} = -f(x)$$

Die Funktion ist punktsymmetrisch.

Aufgabe 3. c)
Senkrechte Asymptoten:

$$x=-2 \quad \text{und} \quad x=2$$

Zählergrad > Nennergrad; Wir führen die Polynomdivision durch:

$$x^3 : (x^2-4) = x + \frac{4x}{x^2-4}$$

Daraus folgt, dass

$$y = x$$

schräge Asymptote ist.

Aufgabe 3. d)
Wir bilden die erste Ableitung:

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)\cdot 3x^2 - x^3\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$$

Aufgabe 3. e)
Punkt P:

$$f(4) = \frac{16}{3} \qquad \Rightarrow P(4|\frac{16}{3})$$

Steigung m:

$$m = f'(4) = \frac{4}{9} \qquad \Rightarrow y = mx + t$$

y-Achsenabschnitt t:

$$\Rightarrow \frac{16}{3} = \frac{4}{9}\cdot 4 + t \qquad \Rightarrow t = \frac{32}{9}$$

Funktionsterm Tangente:

$$y = \frac{4}{9}x + \frac{32}{9}$$

Schnittwinkel x-Achse:

$$m = \tan(\alpha) \qquad \Rightarrow \alpha = 24{,}0^\circ$$

Aufgabe 4. a) b)

- Doppelte Nullstelle:$x=0$ $\quad\Rightarrow x^2$ im Zähler
- Definitionslücken:$x=\pm 2$ $\quad\Rightarrow (x^2-4)$ im Nenner
- Weitere Asymptote: $y=2$ $\quad\Rightarrow$ Zählergrad =Nennergrad; Faktor 2.

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$$

Aufgabe 4. c)

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2-4} = \frac{2x^2}{x^2-4} = f(x)$$

Aufgabe 5. a)
Faktorisieren des Nenners liefert:

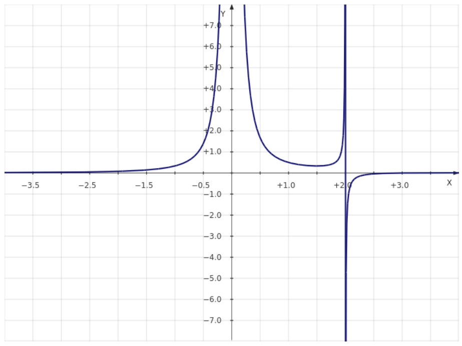
$$4x^2(x^2+x-6) = 4x^2(x+3)(x-2)$$

Die Definitionsmenge ist damit:

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 2\}$$

Nullstellen sind Nullstellen des Zählers:

$$(x^2-9) = (x+3)(x-3) = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$



Der Linearfaktor $(x+3)$ kommt sowohl im Zähler als auch im Nenner vor. Wir kürzen ihn und führen die Grenzwertbetrachtung durch:

$$\lim_{x\to-3} \frac{x-3}{4x^2(x-2)} = \frac{-6}{-180} = \frac{1}{30}$$

Dieser Grenzwert ist beidseitig, hierbei handelt es sich um eine stetig hebbare Definitionslücke.

Aufgabe 6. a)
Wir bringen alles auf einen gemeinsamen Nenner:

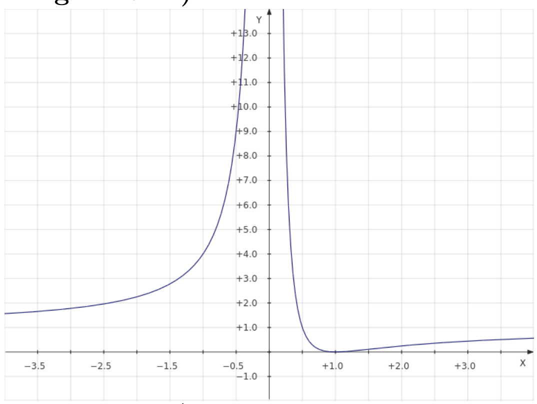
$$\frac{x^2-2x+1}{x^2} = 0 \qquad \Rightarrow x^2-2x+1 = (x-1)^2 = 0$$

Hieraus folgt, dass $x=1$ einzige, doppelte Nullstelle ist.

$$\lim_{x\to0+} \frac{x^2-2x+1}{x^2} = \text{„}\frac{1}{+0}\text{"} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0-} \frac{x^2-2x+1}{x^2} = \text{„}\frac{1}{+0}\text{"} = +\infty$$

Aufgabe 6. b)



Aufgabe 7. a)
Nullstellen des Zählers = Nullstellen

$$x^2+3x = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -3$$

Zwei einfache Nullstellen.
Nullstellen des Nenners = Definitionslücken

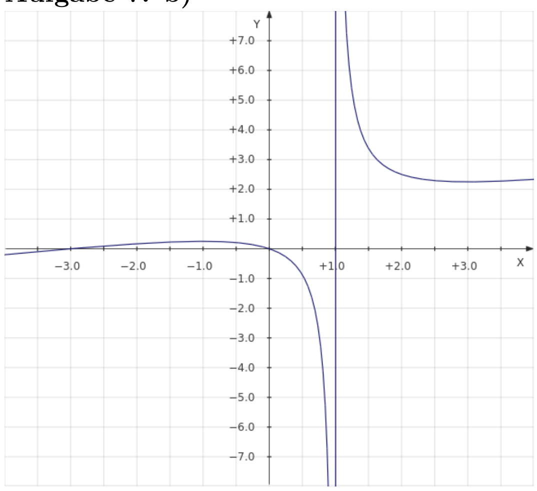
$$4(x-1) = 0 \qquad \Rightarrow x = 1$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x\to1-} \frac{x^2+3x}{4(x-1)} = \text{„}\frac{4}{-0}\text{"} = -\infty$$

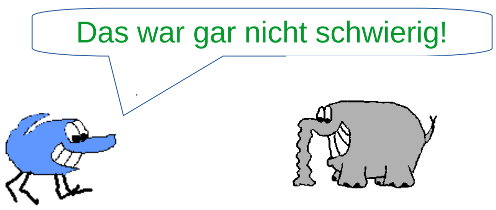
$$\lim_{x\to1+} \frac{x^2+3x}{4(x-1)} = \text{„}\frac{4}{+0}\text{"} = +\infty$$

Aufgabe 7. b)



Die schräge Asymptote finden wir mit Polynomdivision:

$$(x^2+3x) : (4x-4) = \frac{1}{4}x + 1 + \frac{1}{x-1} \qquad \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$$



Hier geht es zurück zum Aufgabenblatt