Lösung

Aufgabe 1.

$$|\overrightarrow{PQ}| = 6 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{z.B.} \quad P(1|1|1); \quad Q(7|1|1)$$

Aufgabe 2.

Die Vektoren müssen erstens senkrecht aufeinander stehen...

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0$$

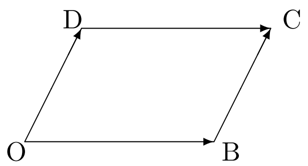
$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 4 + 2 = 0$$

$$\overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 - 2 - 2 = 0$$

...und zweitens müssen sie gleich lang sein:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 2^2 + 2^2} = 3 \qquad |\overrightarrow{AE}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = 3 \qquad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{2^2 + 1 + (-2)^2} = 3;$$

Aufgabe 3. a)



Es gilt die Vektorkette:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$

Mit $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD}$ folgt:

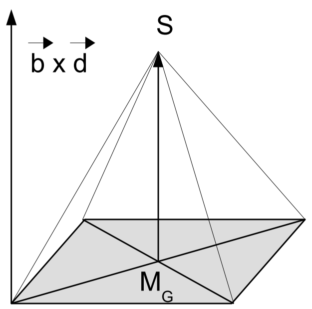
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad C(-5|5|2)$$

Aufgabe 3. b)

Der Inhalt der Grundfläche G ist gleich dem Betrag des Vektorproduktes:

$$G = |\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OD}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8^2 + 6^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$$

Aufgabe 3. c)



Der Mittelpunkt der Grundfläche M_G hat die Koordinaten:

$$\overrightarrow{OM_G} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{0} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad M_G(-2{,}5|2{,}5|1)$$

Der Vektor $\overrightarrow{M_GS}$, der die Spitze S mit dem Mittelpunkt verbindet, steht senkrecht auf der Grundfläche, verläuft also in Richtung des Vektors $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Da dieser schon die Länge $5\sqrt{5}$ hat, können wir ihn gleich als

$$\overrightarrow{M_GS}$$

übernehmen.

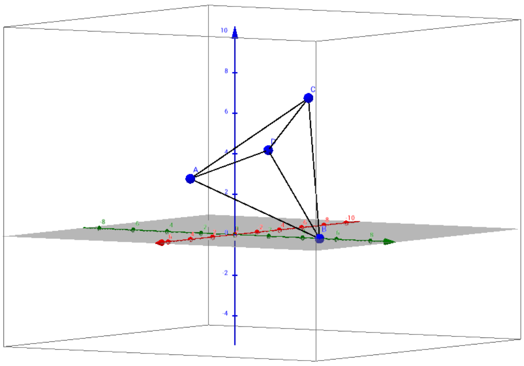
Für den Ortsvektor der Spitze gilt dann die Vektorkette:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM_G} + \overrightarrow{M_GS} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 8{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. d)
Der Punkt N auf der x-Achse hat die gleiche x_2-Koordinate wie Punkt D, also ist $N(0|1|0)$. Der Radiusvektor des Kreises ist mit seinem Betrag:

$$\overrightarrow{ND} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{ND}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

Aufgabe 4. a)
Die Punkte A und D liegen beide in der x_1x_3-Ebene.



Aufgabe 4. b)
Ein reguläres Tetraeder besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken. Zu zeigen ist, dass gilt:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}|$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+25+9} = \underline{5\sqrt{2}}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+25+16} = \underline{5\sqrt{2}}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{49+1} = \underline{5\sqrt{2}}$$

Weiter muss gelten, dass der Winkel zwischen den genannten Vektoren 60° beträgt:

$$\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \cos^{-1}\frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}} = \cos^{-1}\frac{12+25-12}{50} = \cos^{-1}\frac{1}{2} = 60^\circ$$

$$\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \cos^{-1}\frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}} = \cos^{-1}\frac{28-3}{50} = \cos^{-1}\frac{1}{2} = 60^\circ$$

Aufgabe 4. c)
Der Mittelpunkt M_T des Tetraeders ist:

$$\overrightarrow{OM_T} = \frac{1}{4}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}) = \frac{1}{4}\cdot\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad M_T(0{,}5|2{,}5|3{,}5)$$

Wir bilden die Vektoren $\overrightarrow{M_TA}$ und $\overrightarrow{M_TB}$:

$$\overrightarrow{M_TA} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -2{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{M_TB} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$$

Der Winkel zwischen diesen beiden Vektoren ist:

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -2{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}}{\sqrt{3{,}5^2+2{,}5^2+0{,}5^2}\cdot\sqrt{0{,}5^2+2{,}5^2+3{,}5^2}} = \frac{-6{,}25}{18{,}75} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \qquad \varphi \approx 109{,}5^\circ$$

Aufgabe 4. d)
Der Oberflächeninhalt ist viermal die Dreiecksfläche:

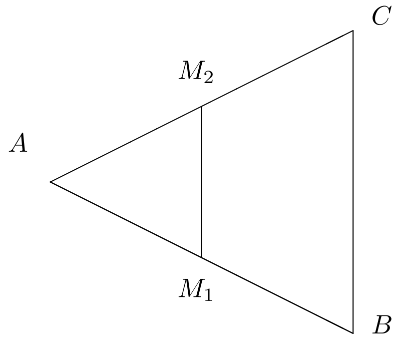
$$O_T = 4\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| = 2\cdot\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 2\cdot\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}\right| = 2\cdot\sqrt{5^2+25^2+35^2} = 50\sqrt{3} \approx 86{,}60\,\text{FE}$$

Das Volumen errechnet sich mit dem Spatprodukt:

$$V_T = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\circ\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{250}{6} \approx 41{,}7\,\text{VE}$$

Aufgabe 4. e)

Das Dreieck ABC wird durch zentrische Streckung mit dem Zentrum A und dem Streckungsfaktor $k = \frac{1}{2}$ auf das Dreieck AM_1M_2 abgebildet. Alle Abmessungen des kleinen Dreiecks sind dann halb so groß wie die des ursprünglichen Dreiecks, der Flächeninhalt ist dann



$$A_d = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot A_D = \frac{1}{4} \cdot A_D = 5{,}41\,FE$$

Der Rauminhalt des kleinen Tetraeders ist

$$V_t = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V_T = \frac{1}{8} \cdot V_T = \frac{125}{24} \approx 5{,}21\,\mathrm{VE}$$

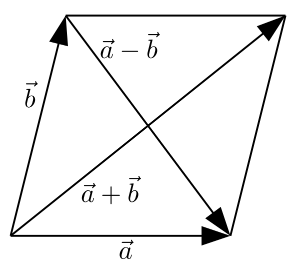
Aufgabe 4. f)
Das Volumen des Pyramidenstumpfes ist:

$$V_S = V_T - V_t = \frac{250}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) \approx 36{,}46\,\mathrm{VE}$$

Der Oberflächeninhalt des Stumpfes ist gleich dem des großen Tetraeders minus drei kleine Dreiecke plus ein kleines Dreieck als Schnittfläche:

$$O_S = O_T - 3 \cdot A_d + A_d = O_T - 2A_d = 50\sqrt{3} - 2 \cdot 5{,}41 = 75{,}78\,\mathrm{FE}$$

Aufgabe 5.



Betrachtet wird ein Parallelogramm, welches von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Dann sind die Diagolalen $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$. Die Quadrate über die Vektoren haben den Flächeninhalt $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \circ \vec{v}$. Es gilt dann für die Fläche A_Q der Diagonalenquadrate:

$$A_Q = (\vec{a}+\vec{b})\circ(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})\circ(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2+2\cdot\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{b}^2+\vec{a}^2-2\cdot\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{b}^2 = 2\vec{a}^2+2\vec{b}^2$$

Dies entspricht genau dem Flächeninhalt der Quadrate über den zwei $\vec{a}$ und den zwei $\vec{b}$ Vektoren.

Aufgabe 6. a)
Die Koordinaten der Punkte in der x_1x_2-Ebene lauten:

$$A(2|-3|0) \qquad B(1|4|0) \qquad C(-3|-4|0)$$

Aufgabe 6. b)
Die Flächeninhalte liefert das Vektorprodukt. Ursprüngliches Dreieck:

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -16 \\ -12 \\ 34 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 12^2 + 34^2} \approx 19{,}72\,\mathrm{FE}$$

Projiziertes Dreieck:

$$A'_D = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 34 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 34 = 17\,\mathrm{FE}$$

Der Flächeninhalt des projizierten Dreiecks ist um

$$(1 - \frac{17}{19{,}72}) \cdot 100\% = 13{,}8\%$$

kleiner als der des ursprünglichen.
Aufgabe 7. a)

Der Punkt A auf der Kugel erfüllt die Vektorgleichung:

$$\begin{aligned}
[\vec{A} - \vec{M}]^2 &= r^2 \quad (I) \\
\left[\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}\right]^2 &= \\
6^2 + 3^2 + (-2)^2 &= 49
\end{aligned}$$

Die Kugel hat also den Radius $r = \sqrt{49} = 7$. Wir setzen nun den Punkt B_k in (I) ein:

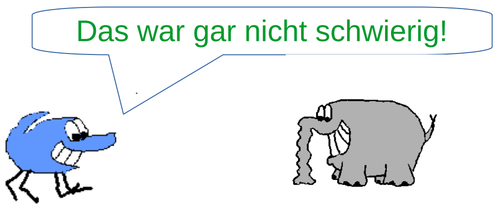
$$\begin{aligned}
[\vec{B}_k - \vec{M}]^2 &= 49 \\
\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}\right]^2 &= \\
3^2 + 6^2 + (k-7)^2 &= 49 \qquad | - 45 \\
(k-7)^2 &= 4 \qquad |\sqrt{\ldots} \\
k - 7 &= \pm 2 \\
\underline{\text{Fall 1:}} \quad k &= 9 \Rightarrow \quad B_9(5|5|9) \\
\underline{\text{Fall 2:}} \quad k &= 5 \Rightarrow \quad B_5(5|5|5)
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. b)
Wir bilden die Vektoren $\overrightarrow{B_9M}$ und $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{B_9M} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Flächeninhalt eines von zwei Vektoren aufgespannten Dreiecks ist gleich dem halben Betrag des Vektorprodukts:

$$\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 18 \\ -18 \\ 27 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{18^2 + 18^2 + 27^2} \approx 18{,}6\,\text{FE}$$



Hier geht es zurück zum Aufgabenblatt