

Aufgabe 1. a)

Die gesuchte Funktion soll vierten Grades sein, also ist unsere Grundform:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Eine ganzrationale Funktion ist achsensymmetrisch, wenn sie nur gerade Potenzen von x hat. Dadurch reduziert sich unsere Form auf:

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

Nun setzen wir die Nullstelle ein und erhalten:

$$f(0) = 0 \Rightarrow e = 0$$

Weiter setzen wir den Hochpunkt ein:

$$f(1) = 2 \Rightarrow a + c = 1 \quad I$$

Im Hochpunkt ist die Ableitung null:

$$f'(x) = 4ax^3 + 2cx \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow f'(1) = 4a + 2c = 0 \quad II$$

Wir lösen I nach a auf und setzen in II ein:

$$4(1 - c) + 2c = 0 \Rightarrow c = -2$$

Daraus folgt $a = 1$ Der Funktionsterm ist also:

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

Aufgabe 1. b)

Zunächst benötigen wir die Nullstellen rechts und links:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

Die Fläche ist gleich dem Integral dazwischen:

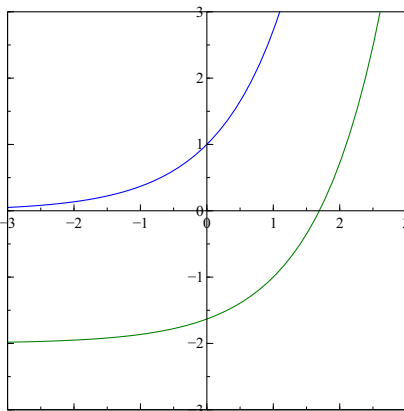
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-x^4 + 2x^2) dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{2} \approx 1,51 \text{ FE}$$

Aufgabe 1. c)

Wir subtrahieren die Funktion von der Geraden $y = 1$ und integrieren:

$$\int_{-1}^1 (1 - (-x^4 + 2x^2)) dx = \left[x + \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{16}{15} \text{ FE}$$

Aufgabe 2. a)



Der Graph ist gegenüber der ursprünglichen e-Funktion um zwei nach unten und eins nach rechts verschoben.

Aufgabe 2. b)

$$H(x) = e^{x-1} - 2x$$

Aufgabe 3. a)

Wir leiten ab mit der Produktregel:

$$F'(x) = e^{-x} \cdot (x+1) - e^{-x} = x \cdot e^{-x} = f(x)$$

Aufgabe 3. b)

Wir integrieren von 0 bis z :

$$A(z) = \int_0^z f(x) dx = [-e^{-x} \cdot (x+1)]_0^z = -e^{-z} \cdot (z+1) + 1$$

Anschließend bilden wir den Grenzwert:

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} -e^{-z} \cdot (z+1) + 1 = 1$$

Die Fläche hat den endlichen Wert 1 FE.

Aufgabe 4. a)

Das Integral ist gleich:

$$[4 \sin x]_0^a = 4 \sin a = 2 \quad | :4$$

$$\sin a = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{6}\pi$$

$$a_2 = \frac{5}{6}\pi$$

Aufgabe 4. b)

Das Integral ist gleich:

$$\left[\frac{1}{2}(-\cos x) \right]_0^2 = 0,827$$

Die Funktion $f(x) = \sin(2x)$ hat eine Nullstelle bei $\frac{\pi}{2} \approx 1,5$. Wir haben im Intervall $[0; 2]$ ein Flächenstück oberhalb der x-Achse und eins unterhalb, welches negativ in die Flächenbilanz eingeht.

Aufgabe 5. a)

Die Parallele zur x-Achse hat die Funktionsgleichung $y = k^2$. Der Wert des Integrals als Flächenbilanz soll dann null werden:

$$\int_0^1 (x^2 - k^2) dx = 0$$

damit folgt für k :

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - k^2x \right]_0^1 = 0$$

$$\frac{1}{3} - k^2 = 0$$

$$k = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Es kommt nur die positive Lösung infrage, also ist $k = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Aufgabe 6. a)

Nullstellen:

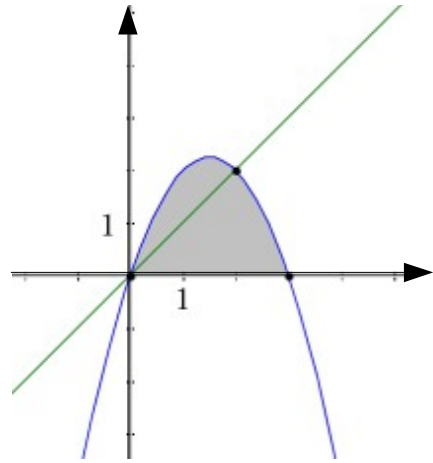
$$\begin{aligned} -x^2 + 3x &= 0 \\ x \cdot (-x + 3) &= 0 \quad x_1 = 0 \\ x_2 &= 3 \Rightarrow N_1(0|0); \quad N_2(3|0) \end{aligned}$$

Um auf Extrempunkte zu untersuchen bilden wir die erste Ableitung :

$$f'(x) = -2x + 3 \stackrel{!}{=} 0 \quad -2(x - 1,5) = 0 \quad \Rightarrow x_0 = 1,5$$

Vorzeichentabelle zur Bestimmung des Extrempunktes (hier nicht verlangt, aber für später folgende Aufgabe relevant):

	$x < 1,5$	$1,5$	$x > 1,5$
-2	$-$	$-$	$-$
$(x - 1,5)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$ HP	$\searrow$



Die y- Koordinate des Hochpunktes ist:

$$f(1,5) = -1,5^2 + 3 \cdot 1,5 = 2,25 \quad \Rightarrow H(1,5|2,25)$$

Aufgabe 6. b)

Flächeninhalt:

$$A_{ges} = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

Aufgabe 6. c)

Schnittpunkt von Gerade und Parabel:

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x &= x \\ x^2 &= 2x \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

Flächeninhalt zwischen Gerade und G_f :

$$A_1 = \int_0^2 (-x^2 + 3x - x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

Das Verhältnis der beiden Teilstücke ist:

$$A_2 = A_{ges} - A_1 = \frac{9}{2} - \frac{4}{3} = \frac{19}{6}; \quad A_2 : A_1 = 8 : 19$$

Aufgabe 6. d)

Die zweite Ableitung der Integralfunktion $I(x)$ entspricht der ersten Ableitung von $f(x)$; welche bereits oben diskutiert wurde. Es gilt:

$$\begin{aligned} I''(x) &> 0 \quad \text{für } x \in]-\infty; 1,5] && I \text{ linksgekrümmt} \\ I''(x) &< 0 \quad \text{für } x \in [1,5; \infty[&& I \text{ rechtsgekrümmt} \\ I''(x) &= 0 \quad \text{für } x = 1,5 && \Rightarrow \text{Wendestelle} \end{aligned}$$

Die integralfreie Darstellung von $I(x)$ ist:

$$I(x) = \int_0^x (-t^2 + 3t) dt = \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right]_0^x = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

Die y-Koordinate des Wendepunktes von $I(x)$ ist also:

$$I(1,5) = -\frac{1}{3}1,5^3 + \frac{3}{2}1,5^2 = -1,125 + 3,375 = 2,25 \Rightarrow W(1,5|2,25)$$

Aufgabe 7.

$$3 \ln(x^2 + 4) \quad e^{x^2} \quad \frac{1}{2} \sin(6x)$$

Aufgabe 8. a)

Wir bilden die erste Ableitung und setzen sie gleich null:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9 = 0 \\ 0 &= x^2 - 8x + 12 \\ x_1 &= 6 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ist:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3}{2}x - 6 \\ f''(x_1) &= 9 - 6 = 3 > 0 \Rightarrow T(6|f(6)) \\ f''(x_2) &= 3 - 6 = -3 < 0 \Rightarrow H(2|f(2)) \end{aligned}$$

Die Extrempunkte sind: $T(6|0)$ und $H(2|8)$.

Aufgabe 8 . b)

Für die Wendestelle setzen wir die zweite Ableitung gleich null und erhalten:

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 6 = 0 \Rightarrow x_w = 4$$

Wir testen die dritte Ableitung an dieser Stelle:

$$f'''(4) = \frac{3}{2} \neq 0$$

Also haben wir einen Wendepunkt bei $W(4|f(4)) = (4|4)$

Aufgabe 8 . c)

Geradensteigung m :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 0}{2 - 6} = -2$$

y-Achsenabschnitt t :

$$0 = -2 \cdot 6 + t \Rightarrow t = 12$$

Funktionsterm Gerade:

$$g(x) = -2x + 12$$

Punktprobe Wendepunkt:

$$4 = -2 \cdot 4 + 12 \quad (w)$$

Der Flächeninhalt A zwischen $f(x)$ und der Geraden setzt sich zusammen aus zwei Teilstücken A_1, A_2 :

$$A = |A_1| + |A_2| = \left| \int_2^4 (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_4^6 (f(x) - g(x)) dx \right|$$

Die Stammfunktion von $h(x) = f(x) - g(x)$ ist:

$$H(x) = \frac{1}{16}x^4 - x^3 + 5,5x^2 - 12x + C$$

$$A = |H(4) - H(2)| + |H(6) - H(4)| = |(-8) - (-9)| + |(-9) - (-8)| = 2 \text{ FE}$$

Das war gar nicht schwierig!



Hier geht es zurück zum [Aufgabenblatt](#)