Lösungsblatt von www.okuyakl.de

Aufgabe 1. a)
Erste Ableitung mit Kettenregel:

$$f'(x) = -2\ln x \cdot \frac{1}{x}$$

Zweite Ableitung mit Produktregel:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \tfrac{2}{x^2} \cdot \ln x - \tfrac{2}{x} \cdot \tfrac{1}{x} \\ &= \tfrac{2}{x^2} \cdot (\ln x - 1) \stackrel{!}{=} 0 \\ \ln x_0 &= 1 \\ x_0 &= e \end{aligned}$$

Tangente:

$$y_T = m \cdot x + t; \qquad x = e; \qquad m = f'(e) = -\frac{2}{e}; \qquad y_T = f(e) = 0$$

$$0 = -\frac{2}{e} \cdot e + t; \quad \Rightarrow t = 2$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{e} \cdot x + 2$$

Aufgabe 1. b)
F mit Produkt- und Kettenregel ableiten:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -(\ln x - 1)^2 - x \cdot 2 \cdot (\ln x - 1) \cdot \tfrac{1}{x} \\ &= -((\ln x)^2 - 2\ln x + 1) - 2\ln x + 2 \\ &= 1 - (\ln x)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 1. c)
Nullstellen:

$$\begin{aligned} 1 - (\ln x)^2 &= 0 \\ \ln x &= \pm 1 \\ x_1 &= e \\ x_2 &= e^{-1} \end{aligned}$$

Damit und mit der gegebenen Stammfunktion berechnen wir die Fläche:

$$A = \int_{e^{-1}}^{e} f(x)\ \mathrm{d}x = \left[-x(\ln x - 1)^2\right]_{e^{-1}}^{e} = 0 - (-e^{-1}(-2)^2) = \frac{4}{e}$$

Aufgabe 1. d)
Jede Integralfunktion hat eine Nullstelle, die dort liegt, wo die obere Grenze, hier die Variable x mit der unteren Grenze, hier die 0, zusammenfällt, also bei $x = 0$. Dann ist $I(0) = 0$, hier ist auch $F(0) = 0$, also ist $F(x) = I(x)$

Aufgabe 1. e)
Laut Merkhilfe ist der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot lnx = 0$$

und damit auch:

$$\lim_{x \to 0^+} -x \cdot (lnx - 1)^2 = 0$$

Das bedeutet, dass das Flächenstück, das von der Funktion und den beiden Achsen im IV. Quadranten begrenzt wird, endlich ist.

Aufgabe 2. a)
Es gilt: $I'(x) = f(x)$, also setzen wir $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} (e^x - 2)^2 &= 0 \\ (e^x - 2) &= 0 \\ e^x &= 2 \\ x &= \ln 2 \end{aligned}$$

Monotonietabelle:

	$x < \ln 2$	$x = \ln 2$	$x > \ln 2$
$(e^x - 2)^2$	$+$	0	$+$
$I'(x)$	$+$	0	$+$
$I(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$
	sms	$Terrassenpunkt$	sms

Die Funktion $I(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend und besitzt einen Terrassenpunkt bei $T(\ln 2|0)$.
Aufgabe 2. b)

$$F'(x) = 0{,}5 \cdot 2 \cdot e^{2x} - 4e^x + 4 = (e^x - 2)^2$$

Aufgabe 2. c) Bestimmung der oberen Integrationsgrenze:

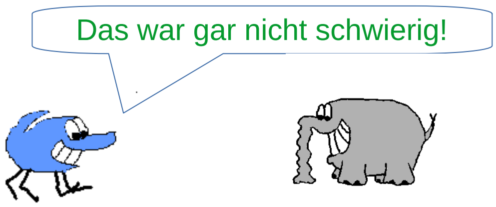
$$\begin{aligned} (e^x - 2)^2 &= 4 \\ e^x - 2 &= \pm 2 \quad \text{nur positive Lösung möglich} \\ e^x &= 4 \\ x &= \ln 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(u) &= \int_u^{\ln 4} (4 - (e^x - 2)^2)\, \mathrm{d}x = \left[4x - 0{,}5 \cdot e^{2x} + 4e^x - 4x\right]_u^{\ln 4} \\ A(u) &= -0{,}5 \cdot 16 + 4 \cdot 4 - 0{,}5 \cdot e^{2u} - 4e^u \\ &= 8 - 0{,}5 \cdot e^{2u} - 4e^u \end{aligned}$$

Aufgabe 2. d)

$$\lim_{u \to -\infty} 8 - 0{,}5 \cdot e^{2u} - 4e^u = 8 - 0 - 0 = 8$$

Die vom Graphen und der Geraden $y = 4$ eingeschlossene Fläche hat einen endlichen Flächeninhalt und beträgt 8 FE.
Aufgabe 3.
$I(x)$ wird durch Graph **B** dargestellt. Graph **A** besitzt zwei Terrassenpunkte, diese würden zwei doppelten Nullstellen von G_f entsprechen. Diese sind jedoch nicht vorhanden. Graph **C** hat 5 Extrema, ist also mindestens 6. Ordnung, in Frage kommt aber nur eine Funktion der Ordnung 3+1, also 4.



Hier geht es zurück zum Aufgabenblatt