Lösungsblatt von www.okuyakl.de

Aufgabe 1. a)
Die Parabel hat die allgemeine Form
$y = 0{,}5x^2 + bx + c$.
Wir setzen die zwei Punkte ein:

$$\begin{aligned}
1 &= 0{,}5 + b + c \\
0{,}5 &= b + c \\
c &= 0{,}5 - b && (I) \\
-2{,}5 &= 0{,}5 \cdot 36 - 6b + c \\
-20{,}5 &= -6b + c && (II)
\end{aligned}$$

(I) in (II) :

$$\begin{aligned}
-20{,}5 &= -6b + 0{,}5 - b \\
-21 &= -7b && b = 3
\end{aligned}$$

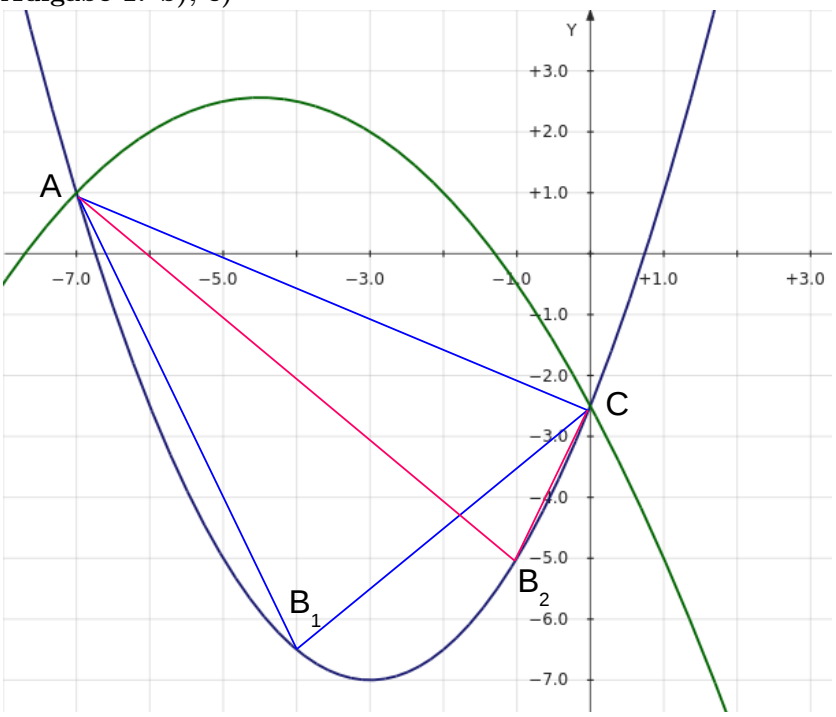
in (I) :

$$c = -2{,}5$$

Die Gleichung der Parabel p_1 lautet:

$$y = 0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5$$

Aufgabe 1. b), e)



Aufgabe 1. c)
Berechnung der Scheitelkoordinaten mit quadratischer Ergänzung:

$$\begin{aligned}
y &= -0{,}25(x^2 + 9x) - 2{,}5 \\
&= -0{,}25[(x^2 + 2 \cdot 4{,}5x + 4{,}5^2) - 4{,}5^2] - 2{,}5 \\
&= -0{,}25[(x + 4{,}5)^2 - 20{,}25] - 2{,}5 \\
&= -0{,}25(x + 4{,}5)^2 + 2{,}5625 \\
\Rightarrow\ & S(-4{,}5|2{,}5625)
\end{aligned}$$

Aufgabe 1. d)
Wir berechnen die Schnittpunkte durch Gleichsetzen der beiden Parabelterme:

$$\begin{aligned}
0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5 &= -0{,}25x^2 - 2{,}25x - 2{,}5 \\
0{,}75x^2 + 5{,}25x &= 0 \\
x \cdot (0{,}75x + 5{,}25) &= 0 && x_1 = 0 \\
0{,}75x_2 &= -5{,}25 \\
x_2 &= -7
\end{aligned}$$

Einsetzen in p_1 liefert:

$$y_A = 0{,}5 \cdot 49 - 21 - 2{,}5 = 1 \Rightarrow A(-7|1)$$

$$y_B = -2{,}5 \Rightarrow B(0|-2{,}5)$$

Aufgabe 1. f)
Die Dreiecke werden durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannt. Diese sind:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x + 7 \\ 0{,}5x^2 + 3x - 3{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir für den Flächeninhalt des Dreiecks mittels Determinante:

$$A_D = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x+7 & 7 \\ 0{,}5x^2+3x-3{,}5 & -3{,}5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-3{,}5x - 24{,}5 - 3{,}5x^2 - 21x + 24{,}5) = -1{,}75x^2 - 12{,}25x[FE]$$

Aufgabe 1. g)
Für die Bestimmung des Extremwertes führen wir die quadratische Ergänzung durch:

$$\begin{aligned} A_{max} &= -1{,}75(x^2+7x) \\ &= -1{,}75(x^2+7x+3{,}5^2-3{,}5^2) \\ &= -1{,}75[(x+3{,}5)^2-12{,}25] \\ &= -1{,}75(x+3{,}5)^2+21{,}44 \\ A_{max} &= 21{,}44 \quad \text{für} \quad x=-3{,}5 \end{aligned}$$

Aufgabe 2. a)
Das Rechteck hat die Länge $8-x$ und die Breite $6+2x$. Länge mal Breite ist Fläche:

$$A_R = (8-x)(6+2x) = 48 - 6x + 16x - 2x^2 = -2x^2 + 10x + 48$$

Aufgabe 2. b)

$$\begin{aligned} 20 &= -2x^2+10x+48 \\ 0 &= -2x^2+10x+28 \\ x_{1/2} &= \frac{-10\pm\sqrt{100+4\cdot 2\cdot 28}}{-4} \\ x_{1/2} &= \frac{-10\pm 18}{-4} \\ x_1 &= 7 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Für diese beiden Werte beträgt der Flächeninhalt des Rechtecks $20\,\text{cm}^2$.
Aufgabe 3. a)
Die Scheitelpunktform liegt auf der Hand: die ersten drei Summanden bilden eine binomische Formel:

$$y = (x^2 - 2ax + a^2) + 0{,}5a - 2 = (x-a)^2 + 0{,}5a - 2 \quad \Rightarrow \quad S_a(a|0{,}5a-2)$$

Wer dies nicht auf Anhieb sieht, kann auch die quadratische Ergänzung durchführen.

Aufgabe 3. b)

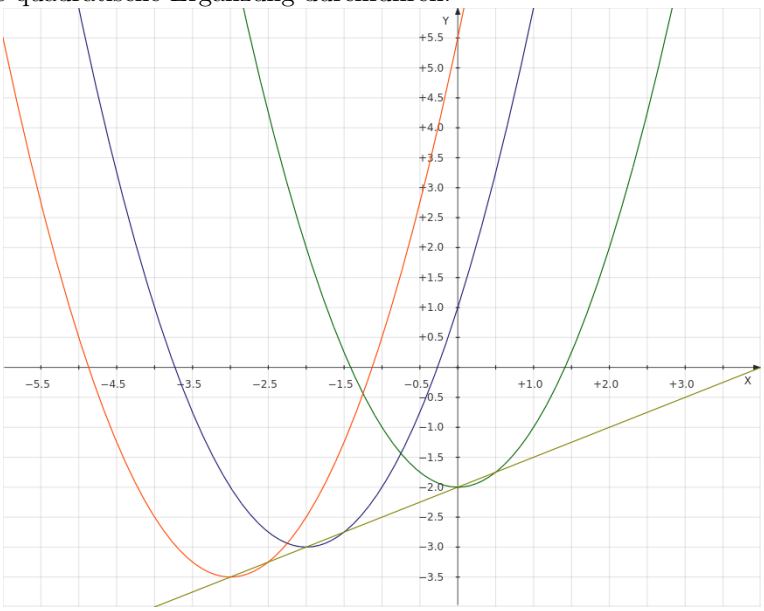
$$S_{-2}(-2|-3)$$
$$S_0(0|-2)$$
$$S_{-3}(-3|-3{,}5)$$

Aufgabe 3. c)
Die Parameterdarstellung des Trägergraphs der Scheitelpunkte ist:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0{,}5a-2 \end{pmatrix}$$

Und mit $x = a$:

$$y = 0{,}5x - 2$$



Aufgabe 3. d)
Wir setzen den Punkt ein:

$$\begin{aligned} 62 &= 64 - 8 \cdot 2a + a^2 + 0{,}5a - 2 \\ 0 &= a^2 - 15{,}5a \\ 0 &= a(a - 15{,}5) && a_1 = 0 \\ 0 &= a - 15{,}5 && a_2 = 15{,}5 \end{aligned}$$

Aufgabe 3. e)
Eine nach oben geöffnete Normalparabel hat die Form:

$$y = x^2 + bx + c$$

Wir bilden zwei Gleichungen, indem wir die zwei gegebenen Punkte einsetzen:

$$\begin{aligned} -0{,}75 &= (-1{,}5)^2 - 1{,}5b + c \\ -3 &= -1{,}5b + c && (I) \\ 8 &= 1 + b + c \\ 7 - b &= c && (II) \end{aligned}$$

II in I

$$\begin{aligned} -3 &= -1{,}5b + 7 - b \\ -10 &= -2{,}5b \\ b &= 4 && c = 3 \end{aligned}$$

Die Gleichung dieser Parabel lautet also:

$$y = x^2 + 4x + 3$$

Wenn die Parabel zur Schar gehören soll, muss $4x = 2ax$, also $a = 2$ gelten. Damit wäre der Funktionsterm:

$$p_2: \quad y = x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 + 0{,}5 \cdot 2 - 2 = x^2 - 4x + 3$$

$\Rightarrow$ Die Parabel gehört zur Schar.
Aufgabe 4. a)
Zur Scheitelbestimmung ergänzen wir quadratisch:

$$\begin{aligned} y &= -1{,}5(x^2 - 4x) - 4{,}5 \\ &= -1{,}5[(x^2 - 4x + 2^2) - 2^2] - 4{,}5 \\ &= -1{,}5[(x-2)^2 - 4] - 4{,}5 \\ &= -1{,}5(x-2)^2 + 6 - 4{,}5 \\ &= -1{,}5(x-2)^2 + 1{,}5 \end{aligned}$$

Der Scheitel ist bei $S(2|1{,}5)$; die Wertemenge ist $\mathbb{W} =]-\infty; 1{,}5]$
Aufgabe 4. b)
Wir vergleichen den y-Wert des Punktes mit dem Funktionswert der Parabel an dieser Stelle:

$$\begin{aligned} -25 &\overset{<}{>} -1{,}5 \cdot (-11)^2 + 6 \cdot (-11) - 4{,}5 \\ -25 &\overset{<}{>} -181{,}5 - 66 - 4{,}5 \\ -25 &> -252 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Der Funktionswert ist kleiner, somit ist der Punkt oberhalb der Parabel.

Aufgabe 5. a)

Bei einer Spiegelung an der x-Achse multiplizieren wir das y, also den gesamten Funktionsterm mit -1 und erhalten:

$$f'(x) = -4(x+1{,}5)^2 + 3$$

Bei einer anschließenden Spiegelung an der y-Achse multiplizieren wir das x, das im Funktionsterm enthalten ist, mit -1 und erhalten:

$$f''(x) = -4(-x+1{,}5)^2 + 3 \quad \text{oder} \quad f''(x) = -4(x-1{,}5)^2 + 3$$

Aufgabe 6. a)

Mit dem gegebenen Scheitel ist die Parabel der Form:

$$g(x) = a(x-80)^2 + 31{,}25$$

Hier setzen wir den weiteren gegebenen Punkt ein und erhalten a:

$$\begin{aligned} 20 &= a(50-80)^2 + 31{,}25 \\ -11{,}25 &= 900a \\ a &= -\tfrac{1}{80} \\ \Rightarrow \quad g(x) &= -\tfrac{1}{80}(x-80)^2 + 31{,}25 \end{aligned}$$

Aufgabe 6. b)

Am Boden ist $y = 0$; Wir berechnen die Nullstellen der Wurfparabel:

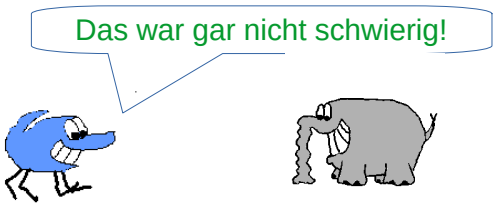
$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{80}(x-80)^2 + 31{,}25 &= 0 \\ -\tfrac{1}{80}(x-80)^2 &= -31{,}25 \\ (x-80)^2 &= 2500 \\ x-80 &= \pm 50 \\ x_1 &= 130 \\ (x_2 &= 30) \end{aligned}$$

Die erste Lösung ist der gesuchte x-Wert. Der Pfeil ist 130 m − 50 m = 80 m weit geflogen.

Aufgabe 7.

Besitzt eine Parabel Nullstellen, so ist die x-Koordinate ihres Scheitels genau der Mittelwert der x-Werte der Nullstellen; hier ist x_S:

$$x_S = \frac{-4{,}5 + 3{,}5}{2} = -0{,}5$$



Hier geht es zurück zum Aufgabenblatt