Lösungsblatt von www.okuyakl.de

Aufgabe 1. a)
Es sei M die Masse des Phobos, m die Masse des zu beschleunigenden Probekörpers, G die Gravitationskonstante und R der Radius von Phobos. Nach dem Gravitationsgesetz gilt:

$$\begin{aligned} m \cdot g_{Ph} &= \tfrac{G \cdot M \cdot m}{R^2} && | : m \\ g_{Ph} &= \tfrac{G \cdot M}{R^2} \\ g_{Ph} &= \tfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{16}\ \mathrm{kg}}{(11\,000\ \mathrm{m})^2} \\ g_{Ph} &= 6{,}1 \cdot 10^{-3}\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 1. b)
Der Ball soll Phobos auf einer oberflächennahen Kreisbahn umrunden. Hierbei gilt das Kräftegleichgewicht zwischen Zentripetalkraft und Gravitationskraft:

$$\begin{aligned} \tfrac{m \cdot v^2}{R} &= \tfrac{G \cdot M \cdot m}{R^2} && | : m \cdot R \\ v^2 &= \tfrac{G \cdot M}{R} && \sqrt{\ } \\ v &= \sqrt{\tfrac{G \cdot M}{R}} \\ v &= \sqrt{\tfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{16}\ \mathrm{kg}}{11\,000\ \mathrm{m}}} \\ v &= 8{,}2\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Der Ball soll mit einer Geschwindigkeit von $v = 8{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ abgeworfen werden. (Also nicht zu fest werfen, sonst verschwindet er im Weltall!)

Aufgabe 1. c)
Der Umfang der Kreisbahn sei $U = 2\pi \cdot R$. Dann ist die benötigte Zeit gleich (zur Erinnerung: $s = v \cdot t$):

$$t = \frac{U}{v} = \frac{2\pi \cdot R}{v} = \frac{2\pi \cdot 11\,000\,\mathrm{m}}{8{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 8430\,\mathrm{s} \approx 2\,\mathrm{h}20\,\mathrm{min}$$

Die Umlaufdauer ist mit über zwei Stunden sehr lang; man sollte sich also etwas zum Lesen mitnehmen...

Aufgabe 2. a)

- Größerer Abstand zum Erdmittelpunkt bedeutet geringere Anziehung.
- Am Pol wirkt keine Zentrifugalkraft, diese ist am Äquator maximal.

Aufgabe 2. b)
Die Formel zur Berechnung von g lässt sich mit dem Gravitationsgesetz herleiten:

$$\begin{aligned} mg &= \tfrac{G \cdot M \cdot m}{r^2} && | : m \\ g &= \tfrac{G \cdot M}{r^2} \\ g_{Pol} &= \tfrac{6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(6357 \cdot 10^3\ \mathrm{m})^2} && = 9{,}860\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ g^*_{Aeq} &= \tfrac{6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{(6378 \cdot 10^3\ \mathrm{m})^2} && = 9{,}798\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

g^*_{Aeq} ist noch ohne Berücksichtigung der Zentrifugalbeschleunigung a_z; diese muss noch abgezogen werden, um g_{Aeq} zu erhalten:

$$\begin{aligned} a_z &= \omega^2 r \\ &= (\tfrac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60\,\mathrm{s}})^2 \cdot \cdot 6378\cdot 10^3\,\mathrm{m} \\ &= 5{,}368\cdot 10^{-3}\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

$$g_{Aeq} = g^*_{Aeq} - a_z = 9{,}793\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Hierbei ist zu beachten, dass der Effekt der Fliehkraft viel kleiner ausfällt als der der Radiendifferenz. Der relative Unterschied der Erdbeschleunigungen ist:

$$\frac{g_{Pol} - g_{Aeq}}{g_{Pol}} = 0{,}68\%$$

Aufgabe 3.
Wir setzen Zentrifugal- gleich Gravitationskraft:

$$\begin{aligned} \tfrac{mv^2}{r} &= \tfrac{G\cdot M\cdot m}{r^2} && |: mv^2\cdot r^2 \\ r &= \tfrac{G\cdot M}{v^2} \\ r &= \tfrac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}\cdot 10\cdot 1{,}98\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{(3{,}0\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2} \\ r &= 15\cdot 10^3\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.
Die Masse der Erde sei M_E, die des Mondes M_M. Der Abstand dieses Punktes zur Erde sei $d-r$. Dann gilt für die Gravitationskräfte:

$$\begin{aligned} F_{G,Erde} &= F_{G,Mond} \\ \tfrac{G\cdot M_E\cdot m}{(d-r)^2} &= \tfrac{G\cdot M_M\cdot m}{r^2} \\ \tfrac{M_E}{(d-r)^2} &= \tfrac{M_M}{r^2} \\ \tfrac{M_E}{M_M} &= \tfrac{(d-r)^2}{r^2} \\ \sqrt{\tfrac{M_E}{M_M}} &= \tfrac{d-r}{r} \\ \sqrt{\tfrac{M_E}{M_M}} &= \tfrac{d}{r} - 1 \\ r &= \tfrac{d}{\sqrt{\frac{M_E}{M_M}}+1} = \tfrac{384\,400\,\mathrm{km}}{\sqrt{\frac{5{,}97\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{7{,}35\cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}}+1} = 38\,400\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

Aufgabe 5. a)
Der Radius seiner Umlaufbahn ist:

$$r = \frac{v\cdot T}{2\pi} = \frac{3700\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 130\cdot 60\,\mathrm{s}}{2\pi} = 4{,}6\cdot 10^6\,\mathrm{m}$$

Daraus folgt für den Planetenradius:

$$R = r - 800\,\mathrm{km} = 3{,}8\cdot 10^6\,\mathrm{m} \approx 3800\,\mathrm{km}$$

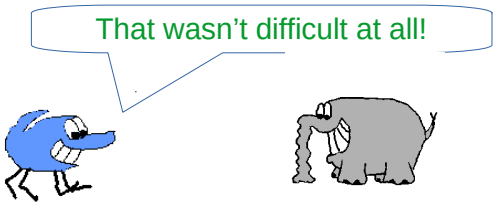
Aufgabe 5. b)
Wir setzen Gravitation gleich Zentripetalkraft und lösen nach M auf:

$$\begin{aligned} \tfrac{mv^2}{r} &= G\cdot \tfrac{M\cdot m}{r^2} \\ M &= \tfrac{v^2\cdot r}{G} = \tfrac{(3700\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2\cdot 3{,}8\cdot 10^6\,\mathrm{m}}{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}} = 9{,}4\cdot 10^{23}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Damit hat er knapp ein Sechstel der Erdmasse.

Aufgabe 5. c)
Wir setzen Gewichtskraft gleich Gravitation:

$$\begin{aligned} mg &= G \cdot \tfrac{M \cdot m}{r^2} \\ g &= G \cdot \tfrac{M}{r^2} \quad = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2} \cdot \tfrac{9{,}4 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}}{(3{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^2} \quad = 4{,}34\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$



Hier geht es zurück zum Aufgabenblatt